Дистанционные 2015, 4 модуль
Записки 7 лекции
Тензорные поля на многообразиях

Напоминание из линейной алгебры:

V^n – n-мерное векторное пр-во $\simeq \mathbb{R}^n$ неканонически

$V \longleftrightarrow (x^1, \dots x^n) = \{x^i\}$

Изоморфизм: $\bar{e}_1, \dots \bar{e}_n$ – базис в V^n

$$V = \sum \bar{e}_i x^i = (\bar{e}_1, \dots \bar{e}_n)\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \bar{e}_i x^i$$

Соглашение (Эйнштейна): Если индекс встречается в выражении дважды, то по нему подразумевается суммирование.

Пример: a^i_j – (i,j) элемент матрицы $A \Rightarrow a^i_i = \sum_{i=1}^n a^i_i = \mathrm{tr} A$

b^i_j – (i,j) эл-т матрицы $B \Rightarrow a^i_j b^j_k = c^i_k$ – (i,k) эл-т матрицы $C = AB$

$a^i_j b^k_i = d^k_j$ – (k,j) эл-т матрицы $D = BA$

Как меняются объекты при заменах координат в V^n? (координат, а не базисов т.к. удобнее для нелинейных обобщений)

① Векторы: $v = x^i \bar{e}_i$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{\bar{e}}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\bar{e}}_n \end{pmatrix} = ? \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{pmatrix}$$

что должно быть тут чтобы $x^i \bar{e}_i \equiv \tilde{x}^i \tilde{\bar{e}}_i \quad \forall \{x^i\}$?

$$v = (\tilde{\bar{e}}_1, \dots \tilde{\bar{e}}_n)\begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{pmatrix} = (\bar{e}_1, \dots \bar{e}_n)\, ?^T \cdot C \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

$v = (\bar{e}_1, \dots \bar{e}_n)\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$

верно $\forall \{x^i\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow ?^T \cdot C = \mathbb{1} \Rightarrow ? = (C^{-1})^T$$

2) Таким образом:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\tilde{x}^i = c^i_j x^j}$$

Обозначим $D = C^{-1}$

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \tilde{\bar{e}}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\bar{e}}_n \end{pmatrix} = C^{-1T} \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\tilde{\bar{e}}_j = d^k_j \bar{e}_k}$$

$C \sim c^i_j$

$D \sim d^i_j$

2) Операторы (линейные):

$A: V \longrightarrow V$, $A: \underset{\overset{\shortparallel}{\bar{e}_i x^i}}{V} \longmapsto \underset{\overset{\shortparallel}{\bar{e}_i y^i}}{W}$

$$\bar{e}_i x^i = (\bar{e}_1, \dots \bar{e}_n)\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \qquad \bar{e}_i y^i = (\bar{e}_1, \dots \bar{e}_n)\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

A - линейный оператор $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \Leftrightarrow y^i = a^i_j x^j$

умножение на постоянную матрицу

Замена базиса: $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \tilde{y}^1 \\ \vdots \\ \tilde{y}^n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

$A \rightsquigarrow \tilde{A} = ?$ $\qquad a^j_i \rightsquigarrow \tilde{a}^j_i = ?$

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}^1 \\ \vdots \\ \tilde{y}^n \end{pmatrix} = \tilde{A} \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{pmatrix} \Rightarrow C \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \tilde{A} C \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = C^{-1} \tilde{A} C \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad \forall \{x^i\}$$

$$\Rightarrow C^{-1} \tilde{A} C = A \Rightarrow \tilde{A} = C A C^{-1} \Leftrightarrow \boxed{\tilde{a}^i_j = c^i_k a^k_\ell d^\ell_j}$$

3) Билинейные формы

$B: (v, w) \longmapsto b(v, w) \in \mathbb{R}$

$B: V \times V \to \mathbb{R}$, B - билинейна $\Leftrightarrow b(v, w) = (x^1 \dots x^n) B \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$

$$(x^1, \dots, x^n) B \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = (\tilde{x}^1 \dots \tilde{x}^n) \tilde{B} \begin{pmatrix} \tilde{y}^1 \\ \vdots \\ \tilde{y}^n \end{pmatrix} = (x^1, \dots x^n) C^T \tilde{B} C \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{B} = C^{T^{-1}} B C^{-1} \Leftrightarrow \boxed{\tilde{b}_{ij} = d^k_i b_{k\ell} d^\ell_j}$$

Тензора обобщают рассмотренные выше конструкции линейной алгебры на случай нелинейных замен координат, например, переход между картами на гладком многообр.

<u>Замечание</u>: На гладком многообразии естественным образом корректно определено понятие гладкой функции. Действительно, если функция гладка в какой-то карте, (в окр. таки) (координатах), то по св-ву гладкой функции она гладка и в любых других координатах в окр. этой точки

Однако, гладких функций недостаточно даже для описания простейших естественных объектов на многообразии, нужны более сложные конструкции.

① <u>Касательный вектор</u>:

γ: $\gamma(t)$ - гладкая кривая в многообразии M (определение и корректность очевидны).

В пересечении карт U (с лок. координатами x^i) и $\tilde{U}$ (с лок. коорд. $\tilde{x}^i$) $\gamma(t)$ задаётся как $(x^1(t), \dots x^n(t))$ и $(\tilde{x}^1(t), \dots \tilde{x}^n(t))$ соответственно. Вектор скорости $\dot{\gamma}(0)$ имеет компоненты v^i в первой системе и $\tilde{v}^i$ во второй. Как они связаны?

$$v = \frac{d\gamma}{dt}\Big|_{t=0}$$

$$\{v^i\} \xleftarrow{(x^i)} v \xrightarrow{(\tilde{x}^i)} \{\tilde{v}^i\}$$

$$v^i = \frac{dx^i}{dt}\Big|_{t=0} \qquad \tilde{v}^i = \frac{d\tilde{x}^i}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\frac{dx^j}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} v^j$$

$$\Rightarrow \tilde{v}^i = \left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\right) v^j = c^i_j v^j,$$ где c - матрица Якоби перехода от x к $\tilde{x}$

4) Итак, $\tilde{v}^i = c^i_j v^j$, компоненты кас. вектора меняются "как координаты"

Разница с лин. алгеброй: было $\tilde{x}^i = c^i_j x^j$, а тут

(в окр-тности в хор. координатах) $\tilde{x}^i = c^i_j x^j + o(x)$

2) Градиент функции

$f: M \to \mathbb{R}$ - гладкая

Что такое ∇f?

В карте U: $(w_1, \dots, w_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right)$

$\tilde{U}$: $(\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^n}\right)$

Связь: $\underbrace{\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^i}}_{\tilde{w}_i} = \frac{\partial f}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} = w_j \cdot d^j_i$

$d^j_i \sim D$ - обратная к матрице Якоби перехода от x к $\tilde{x}$

Это $\tilde{w}_i = d^j_i w_j$ - компоненты градиента меняются "обратно координатам"

<u>Определение</u>: Если при переходе от коор-т x к коор-м $\tilde{x}$ компоненты некоторой величины ξ

а) не меняются $\xi^i = \tilde{\xi}^i$, то ξ - скаляр

б) меняются как $\tilde{\xi}^i = c^i_j \xi^j$, то ξ - вектор

в) меняются как $\tilde{\xi}_i = d^j_i \xi_j$, то ξ - ковектор

Здесь c^i_j - (i,j) компонента матрицы Якоби перехода от x к $\tilde{x}$: $(c^i_j) = \left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\right)$

d^i_j - (i,j) компонента обратной матрицы: $(d^i_j) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\right) = \left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\right)^{-1}$

Замечание: Вектора являются линейными функциями на ковекторах и наоборот

Д-во: $(v, w) \longrightarrow v^i w_i$ линейность очевидна, корректность тоже.

Определение T – тензор типа (p,q) ранга $p+q$ если его компоненты при замене координат $x \rightsquigarrow \tilde{x}$ меняются как

$$\tilde{T}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = T^{k_1 \dots k_p}_{e_1 \dots e_q} c^{i_1}_{k_1} \dots c^{i_p}_{k_p} d^{e_1}_{j_1} \dots d^{e_q}_{j_q}$$

$$\left(c^i_j\right) = \left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\right), \quad \left(d^i_j\right) = \left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\right)^{-1}$$

Примеры: скаляр – тип $(0,0)$
вектор – тип $(1,0)$
ковектор – тип $(0,1)$
оператор – тип $(1,1)$
бил. форма – тип $(0,2)$

Замечание: В физике, когда говорят о векторах, скалярах, тензорах подразумевают поведение при заменах координат некоторого фиксированного класса (группы Галилея и Пуанкаре в классике, группа Лоренца в релятивистике)

Идейно, неформально, "внешне", "инвариантно" определённая величина имеющая физический или геометрический смысл должна быть тензором. Например, вектор скорости частицы это физическая величина, его модуль тоже физическая величина, а, например, k-ая компонента вектора нефизическая, отдельного инвариантного смысла она не имеет

Замечание: (очевидное) $Q^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ и $R^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ тензоры

$$\Rightarrow S^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \lambda Q^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \mu R^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$$ тоже тензор.

т.е. тензоры одного типа можно складывать

Утв: Аналогично векторам и ковекторам тензоры типа (1,1) тоже являются (поли-)линейными функциями на парах вектор-ковектор соответственно

Д-во: $(v, w) \longrightarrow A(v,w) = v^i a^j_i w_j$

линейность очевидна

корректность: $\tilde{v}^i \tilde{a}^j_i \tilde{w}_j = v^k \underbrace{c^i_k \cdot d^l_i}_{\delta^l_k} a^m_l \underbrace{c^j_m d^n_j}_{\delta^n_m} w_n$

$\tilde{v}^i \tilde{a}^j_i \tilde{w}_j = v^k a^l_k w_l$

Обратно также очевидно.

Пусть e_i – базис в V

e^i – двойственный в V^*

Определим $e_i \otimes e^j$ как функцию на паре (v, w)

$v = e_i v^i$

$w = e^j w_j$

$$e_i \otimes e^j (v, w) = v^i \cdot w_j$$

Общая лин. функция раскладывается в сумму

$$f(v,w) = a^i_j e_i \otimes e^j (v,w)$$

$e_i \otimes e^j$ образуют базис в тензорном произведении пространств $V \otimes V^*$

Замечание: Отличие векторного и прямого произведений

Пусть $A = \langle e_1, \dots e_n \rangle$, $B = \langle \varepsilon_1, \dots \varepsilon_m \rangle$ тогда

$\dim A \times B = \dim A + \dim B$, $\dim A \otimes B = \dim A \cdot \dim B$

т.к. $e_i \otimes \varepsilon_k + e_l \otimes \varepsilon_m \neq (e_i + e_l) \otimes (\varepsilon_k + \varepsilon_m)$

Следствие: Тензоры типа (p,q) образуют векторное пространство являющееся тензорным произведением

$$\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{p} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{q}$$

и являются лин. функциями на наборах p ковекторов и q векторов