Дифсистемы 2015, 4 модуль

Записки 6 лекции

Анализ на многообразиях

(Новиков, Тайманов Современные геометрические структуры и поля)

Гладкие многообразия:

Идея: Гл. многообразие M^n это такая штуки, которая локально, в каждой своей точке устроено как $\mathbb{R}^n$.

Напоминание: Ранее определялись и исследовались свойства гладких подмногообразий $\mathbb{R}^n$

Опр1: $S \subset \mathbb{R}^n$ гладкое подмногообразие $\mathbb{R}^n$ в точке $p \in S$ если $\exists (U \ni p) \subset \mathbb{R}^n$ т. что $S \cap U = \{x \mid f_1(x) = \dots = f_{n-k}(x) = 0\}$ где f_i - гладкие на U функции и $d_p f_i(\cdot)$ линейно независимы в $T_p\mathbb{R}^n$

Эквивалентно: $S \subset \mathbb{R}^n$ гладкое подмногообразие $\mathbb{R}^n$ в точке $p \in S$ если $\exists (U \ni p) \subset \mathbb{R}^n$ и гладкое $C: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ т. что $C(0) = p$ и $C(V) = U \cap S$, $d_0 C(\cdot)$ инъективен, где V некоторая окрестность нуля $V \subset \mathbb{R}^k$

По сути: S - многообразие если локально на нём есть координаты, и их можно дополнить до координат всего $\mathbb{R}^n$ (локально)
То есть это многообразие с какими-то дополнительными условиями на то, как оно помещено в $\mathbb{R}^n$

2)

Формальное определение:

Опр: $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ (гладкий) атлас на M^n если

1) $\bigcup_\alpha U_\alpha \supset M$, т.е. $\{U_\alpha\}$ - покрытие

2) α пробегает конечное или счётное множество

3) $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ взаимно-однозначное отображение на область V_α

4) $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : V_\alpha \to V_\beta$ гладкое и гладкообратимое.

Замечание: Отображение φ_α задаёт на U_α координаты: $x_\alpha^i = \varphi_\alpha^{-1}(x^i)$.
В таком записи условие 4) принимает вид $\det\left(\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j}\right) \neq 0$ и $\det\left(\frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^j}\right) \neq 0$

Опр: U_α называются картами

Задание атласа $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ определяет на M^n топологию очевидным образом: $A \subset M^n$ открыто если $\varphi_\alpha(A \cap U_\alpha)$ открыто в V_α.

Следствие: $U_\alpha \subset M$ открыто $\forall \alpha$
φ_α - гомеоморфизм $\forall \alpha$

Определение. Если в определённом таким образом топологии M^n будет хаусдорфовым, то M^n называется гладким многообразием

Примеры:

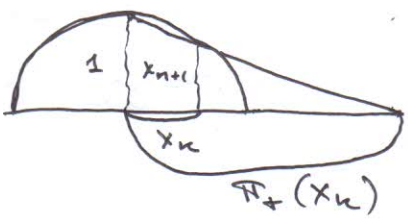
1) $\mathbb{R}^k$, области $U \subset \mathbb{R}^n$ (всё покрыто одной картой)

2) Подмногообразия $\mathbb{R}^n$ (очевидно всё кроме счётности покрытия. Счётность получается из свойств компактов при непрерывных отображениях)

3) Сферы $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

северный полюс $(0, \dots, 0, 1)$
южный полюс $(0, \dots, 0, -1)$

Проекции (на экв. плоскость, стереограф.)



$$\frac{\varphi_+(x_k) - x_k}{x_{n+1}} = \frac{\pi_+(x_k)}{1}$$

$$\Rightarrow \varphi_+(x_k) = \frac{x_k}{1 - x_{n+1}}$$

(в смысле $\varphi_+(x_1, \dots x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)$

а аналогично $\varphi_- \sim \frac{1}{1 + x_{n+1}}$

На пересечении карт:

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \subset (U_- \cap U_+)$$

$$\frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n) \xleftarrow{\varphi_+} (x_1, \dots, x_{n+1}) \xrightarrow{\varphi_-} \frac{1}{1 + x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)$$

$$\varphi_+ \circ \varphi_-^{-1}$$

Функция перехода $\varphi_+ \circ \varphi_-^{-1} \sim$ умножение на $\frac{1 + x_{n+1}}{1 - x_{n-1}}$ на пересечении карт очевидно гладкая. (На $U_+ \cap U_-$ $x_{n+1} \neq \pm 1 \Rightarrow$ и гладко обратимая

4) $\mathbb{R}P^n = S^n/\pm 1$ Атлас получается уменьшением атласа на S^n так, чтобы карты не содержали диаметрально противоположных точек. Например $U_\alpha \rightsquigarrow U_\alpha \cap \{x_i > 0\}$, $U_\alpha \cap \{x_i < 0\}$
Функции перехода те же самые

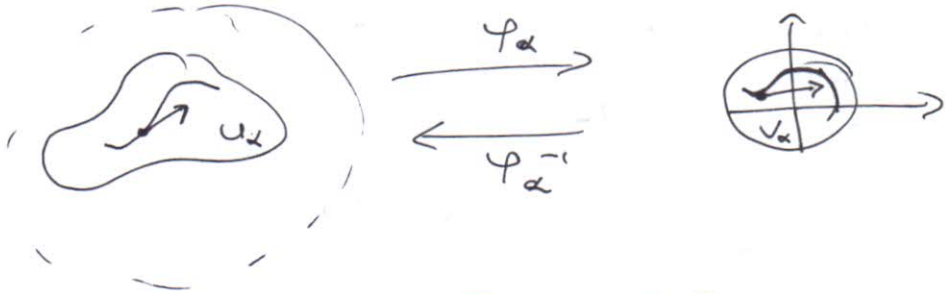
Зачем отдельно потребовали хаусдорфовость?

<u>Пример:</u> (Прямая с двойной точкой)

Два экземпляра $\mathbb{R}$ (с координатой x и y) склеиваем точки $x=c$ и $y=c$ по всем $c \neq 0$. Результат покрывается двумя картами $\mathbb{R}_x$ и $\mathbb{R}_y$, но не хаусдорфово. Тем не менее все точки имеют окрестности гомеоморфные $\mathbb{R}$

<u>Ориентация</u>

Координатные отображения φ_α очевидным стандартным образом задают касательные вектора и пространства к многообразию



В касательных пространствах можно ввести ориентацию. Если ориентация всех касательных пространств "согласована", то многообразие ориентируемо

<u>Строго:</u> M ориентировано если задан такой атлас что $\det\left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \varphi_\beta}\right) > 0$ $\forall \alpha, \beta$ т.ч. $U_\alpha \cap U_\beta$

Если на M можно задать ориентацию $\Rightarrow$ M ориентируемо

Пример: $\mathbb{RP}^1$ ориентируемо, $\mathbb{RP}^2$ нет

Утверждение Поверхность $\{x \mid f_1(x) = \dots f_{n-k}(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ ориентируема (регулярная поверхность)

Д-во: $\operatorname{grad} f_1, \dots \operatorname{grad} f_{n-k}$ линейно независимы во всех точках M т.к. M регулярна. Следовательно в каждой точке их можно дополнить до положительно ориентированного базиса $\mathbb{R}^n$, задав ориентацию в касательных пространствах к M^k.

Следствие: S^n ориентируемы при $n \geq 1$

Разбиение единицы

Определение: На компактном M^n $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ является атласом с толстой границей если

1) $\operatorname{Im} \varphi_\alpha$ содержат единичный шар $\forall \alpha$

2) φ_α^{-1}(шар радиуса $1/2$) тоже образуют покрытие

Определение: на M задано разбиение единицы если $\exists \{\psi_\alpha\}$, $\psi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$ т.что

1) $\psi_\alpha \big|_{M^n \setminus U_\alpha} \equiv 0$

2) $\psi_\alpha(x) \in [0, 1] \quad \forall x, \alpha$

3) $\forall x \quad \sum_\alpha \psi_\alpha(x) \equiv 1$ и лишь конечное число $\psi_\alpha(x) \neq 0$

Утверждение: M^n - гладкое компактное $\Rightarrow$ на нём существует разбиение единицы

Д-во: ① Пусть $\rho(x)$ гладкая функция на $\mathbb{R}_+$ т.что

$\rho(x) \equiv 1$ при $x \in [0, 1/2]$

$\rho(x) \equiv 0$ при $x \in [1, \infty)$

$\rho(x) \in (0,1)$ при $x \in [1/2, 1]$

② Выберем на M^n атлас с конечной границей $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$

Положим $\psi_\alpha(x) = \rho(|\varphi_\alpha(x)|)$

Тогда $\widetilde{\psi}_\alpha(x) = \dfrac{\rho(|\varphi_\alpha(x)|)}{\sum\limits_\alpha \rho(|\varphi_\alpha(x)|)}$ даёт разбиение единицы