Дисциплина 2015, 4 модуль

Записки лекций

О монодромии

Система: $\frac{dy}{dz} = B(z)\,y$ (*) (полюсы в $(a_1, \dots a_n)$)

X – пр-во решений (*)

Y – фунд. матрица (= канон-ту базисов в X)

Аналитическое продолжение $Y \longmapsto \tilde{Y}$

$\Rightarrow$ Фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus \{a_1, \dots a_n\})$ действует на X

$\Rightarrow$ (*) задаёт представление фунд. группы

*/ $\pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus \{a_1, \dots a_n\}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\, X \simeq \mathrm{Aut}\, \mathbb{C}^p \simeq GL(p, \mathbb{C})$

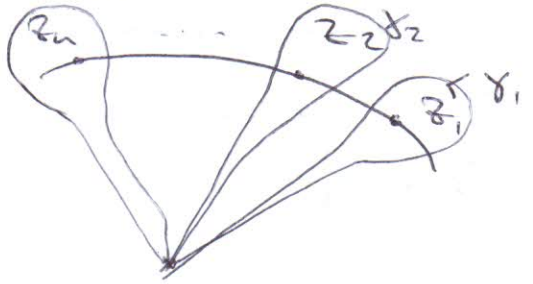
**/ Операторы, а не матрицы!

***/ В координатном описании зависят от базиса (выбора Y)

Как описываются эти представления? Сколько их разных бывает, как найти для заданной системы?

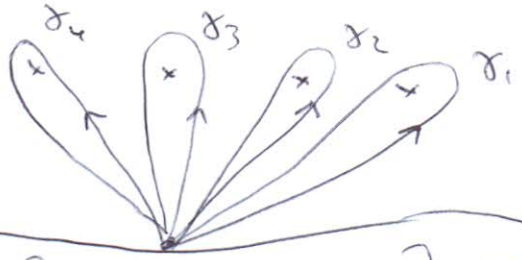
Замечание Фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus \{a_1, \dots a_n\})$ – n образующих 1 соотношение

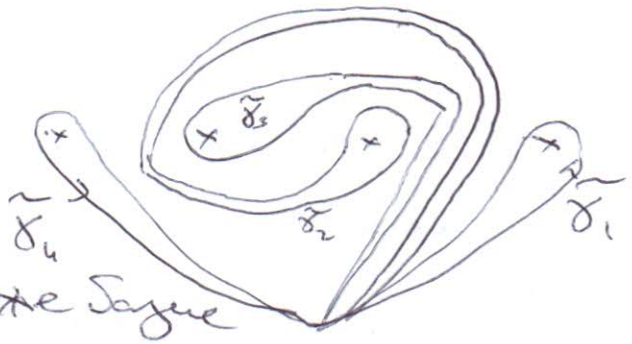
$\Leftrightarrow$ $n-1$ образующая свободная группа



$\gamma_n \cdot \dots \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_1 \simeq id$

2) Наборов образующих бывает много разных





$\Rightarrow$ Представление определяется действием на образующих т.е. набором (!) и матриц с 1 соотношением, определенным с точностью до общего сопряжения

$\to$ тоже базис

$\tilde\gamma_2 = \gamma_2^{-1}\gamma_3^{-1}\gamma_2\gamma_3\gamma_2$

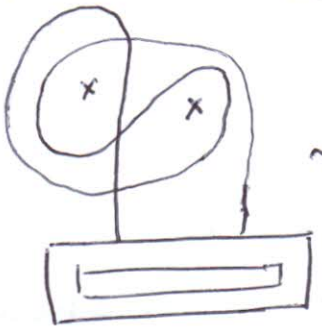
$\tilde\gamma_3 = \gamma_3^{-1}\gamma_2\gamma_3$

$\Rightarrow \tilde\gamma_3\tilde\gamma_2 = \gamma_3\gamma_2$, $\tilde\gamma_3\tilde\gamma_2\tilde\gamma_3^{-1} = \gamma_2$

действительно базис

Замечание как повесить картину на 2 гвоздя чтобы при выдёргивании любого картина падала?

Например так:



$\sim \gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma_2\gamma_1$

для

Очевидно, годится любое слово, в котором γ_1 столько же сколько γ_1^{-1} и γ_2 столько же как и γ_2^{-1}. Очевидно легко обобщается на n гвоздей

Сколькими параметрами задаётся представление монодромии?

$(G_1, \dots G_n)/\sim$ n матриц $p\times p \Rightarrow np^2$

1 соотношение $\Rightarrow np^2 - p^2 = (n-1)p^2$

Общее сопряжение: либо по лемме Шура $SG_iS^{-1} = \tilde S G_i \tilde S^{-1}\ \forall i$, где набор G_i неприводим

$\Rightarrow S\cdot\tilde S^{-1} = \lambda\cdot I$

либо явно, приводим G_1 к диаг. виду ($-(p^2-p)$ параметров) остаётся свободы сопрячать на $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ убиваем ещё $p-1$ параметр.

Итого, при обоих подходах получаем

$$(n-1)p^2 - p^2 + 1 = (n-2)p^2 + 1 \text{ параметров.}$$

Итак, представление фунд. группы $\pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$ задаётся $(n-2)p^2+1$ параметром

<u>Замечание</u> Фуксовы системы, рассматриваемые с точностью до постоянных замен задаются тем же числом параметров

$$y' = \sum \frac{B_i}{z-a_i} y, \quad \tilde{y} = Cy \Rightarrow \tilde{y}' = \sum \frac{\tilde{B}_i}{z-a_i} \tilde{y}$$

где $\tilde{B}_i = C^{-1} B_i C$

Опять n-матрицы $p \times p$, 1 соотношение ($\sum B_i = 0$) и определённость до общего сопряжения. Получаем

$$\underset{\text{отобр. монодромии}}{\chi} : \underset{\text{ф. системы}}{\mathcal{M}} \longrightarrow \underset{\text{представления}}{M} \qquad \dim \mathcal{M} = \dim M = (n-2)p^2 + 1$$

Так как $\dim \mathcal{M} = \dim M$ можно было бы ожидать изоморфизма. На самом деле, изоморфизма нет, но локальный изоморфизм почти всюду есть. Построение фуксовой системы по монодромии и особенностям = Проблема Римана-Гильберта