

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, СЕМИНАР 13.05.2015

Напоминание: M является гладким многообразием если на нём задан гладкий атлас с не более чем счётным набором карт, и относительно индуцированной этим атласом топологии M хаусдорфово.

1. При каких значениях параметра a можно задать гладкий атлас на множестве $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - y^2 = a^2\}$? Будет ли M гладким многообразием?

2. Покажите, что $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^4 + y^4 = 1\}$ является гладким многообразием гомеоморфным S^1 .

3. Обозначим через $\text{Mat}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n \times n}$ множество вещественных $n \times n$ матриц с нормой $|A|^2 = \sum_{i,j} |a_{ij}^2|$.

- а) Покажите, что $\text{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R}) | \det A \neq 0\}$ является гладким многообразием, найдите его размерность.
- б) Покажите, что $\text{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R}) | \det A = 1\}$ является гладким многообразием, найдите его размерность.
- в) Покажите, что $N_n = \{A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R}) | \det A = 0\}$ не является гладким многообразием.

Напоминание: Если в гладком атласе все якобианы переходов между пересекающимися картами положительны, то многообразие ориентировано. Если на многообразии существует такой атлас, то оно ориентируемо.

4. Будут ли ориентируемы многообразия из задач 1,2?

5. Покажите, что $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ и $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ ориентируемы.

6. Рассмотрим прямоугольник, стороны которого ориентированы и склеим противоположные стороны в соответствии с ориентацией.

- а) Покажите, что если все противоположные стороны прямоугольника ориентированы сонаправленно, то при указанной склейке получится гладкое ориентируемое многообразие (двумерный тор).
- б) Покажите, что если сонаправлена только одна пара сторон, то получится неориентируемое многообразие: бутылка Клейна.
- в) Покажите, что если все пары сторон разнонаправлены то полученное многообразие есть проективная плоскость. Ориентируема ли она?

7. Докажите, что всякое гладкое комплексное многообразие, рассматриваемое как вещественное, ориентируемо.

8. Пусть M, N гладкие (связные) многообразия и $M \times N$ ориентируемо. Верно ли что M и N ориентируемы?