

Дискретная математика
Листок 7

ВШЭ, факультет математики
первый курс, четвёртый модуль

Листок можно сдавать до 09.06.2015.

1. Пусть B_n – числа Бернулли. Докажите, что

$$z \operatorname{cth} z = \sum_{n \geq 0} 4^n B_{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \operatorname{ctg} z = \sum_{n \geq 0} (-4)^n B_{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

2. Докажите, что

$$z \operatorname{ctg} z = 1 - 2 \sum_{k \geq 1} \frac{z^2}{k^2 \pi^2 - z^2}$$

3. Определим $\zeta(s) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^s}$. Выразите значения $\zeta(2n)$ через числа Бернулли. Докажите, что $\zeta(2) = \pi^2/6$. Вычислите $\zeta(4)$, $\zeta(6)$, $\zeta(8)$.

4. Определим тангенциальные числа T_{2n-1} по формуле $\operatorname{tg} z = \sum_{n \geq 1} T_{2n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$. Докажите, что

$$T_{2n-1} = (-1)^{n-1} \frac{4^n (4^n - 1)}{2n} B_{2n}.$$

5. Докажите, что T_{2n+1} кратно 2^n .

6. Докажите, число беспорядков d_n является ближайшим целым числом к $n!/e$.

7. Докажите, что

$$d_n = n d_{n-1} + (-1)^n, \quad d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}).$$

Найдите эфп чисел d_n .

8. Пусть h_n – число перестановок мультимножества $(1, 1, 2, 2, \dots, n, n)$, таких что никакие два последовательных члена перестановки не равны. Например, $h_2 = 2$ – перестановки $(1, 2, 1, 2)$, $(2, 1, 2, 1)$. Вычислите h_n .

9. Пусть μ_n – последовательность Мёбиуса. Докажите, что

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-\mu_n/n} = e^x.$$

10. Пусть a_n равно сумме k -ых степеней всех делителей числа n . Выразите производящую функцию Дирихле последовательности a_n через дзета-функцию.