Динамические системы, Листок 2

Крайний срок сдачи 10.06.2015

1. Докажите, что касательное расслоение над гладким многообразием также является гладким многообразием

2. Покажите, что всякая матричная подгруппа в $GL_n(\mathbb{R})$ сохраняющая некоторый тензор является подмногообразием.

3. Может ли гладкое отображение $f : M \to \mathbb{R}^n$ быть нигде не вырожденным если M гладкое компактное многообразие размерности n?

4. Какой ранг может иметь линейный оператор $A : V \to V$ если существуют некоторые $b \in V$ и $c \in V^*$ такие что $A(v) = b \otimes c(\cdot, v)$?

5. Покажите, что если из компонент a^{ij} тензора типа $(2,0)$ составить матрицу A, то элементы b_{kl} обратной матрицы $B = A^{-1}$ будут компонентами тензора типа $(0,2)$.

6. Какой тип имеет тензор, задающий линейное отображение из пространства тензоров типа (p,q) в тензора типа (r,s)?

7. Могут ли на двумерном торе в $\mathbb{R}^3$ существовать непрерывные нигде не зануляющиеся векторное поле, ковекторное поле, поле невырожденных линейных операторов, поле положительно определённых билинейных симметричных форм и поле невырожденных кососимметричных билинейных форм?

8. Найдите образ заданных на единичной сфере в $\mathbb{R}^3$ векторных полей $A = \partial_\varphi$ и $B = \sin\theta\partial_\theta$ при стереографической проекции на плоскость, касающуюся сферы в южном полюсе: $(\theta, \varphi) \mapsto (x, y)$ где $e^{i\varphi}\operatorname{ctg}(\theta/2) = x + iy$.

9. Покажите, что заданное на $\mathbb{R}^3$ (с координатами x^1, x^2, x^3) постоянное поле

$$\varepsilon_{ijk}(x) = \begin{cases} \text{чётность перестановки } [ijk] \text{ если } i \neq j \neq k \neq i \\ 0 \text{ если иначе} \end{cases}$$

является тензором относительно преобразований группы $SO(3)$ и не является тензором относительно преобразований $GL_3(\mathbb{R})$ (полностью антисимметричный тензор)

10. Пусть f и g гладкие функции на многобразии M. Операция $f(x), g(x) \mapsto \{f,g\}(x) = J^{ij}(x)\partial_i f \partial_j g$ называется скобкой Пуассона если она билинейна, антисимметрична и удовлетворяет тождествам Лейбница и Якоби. Если скобка (или что то же самое её структурная матрица $J(x) = (J^{ij}(x))$) невырождена, то она определяет симплектическую форму – замкнутую невырожденную 2-форму $\Omega = \omega_{ij}(x)dx^i \wedge dx^j$, где $\omega(x)$ - матрица обратная к $J(x)$

a) Проверьте, что если в $\mathbb{R}^3$ (координаты x^1, x^2, x^3) задать $J^{ij}(x) = \varepsilon_{ijk}x^k$, где ε полностью антисимметричный тензор, то $\{f,g\} = J^{ij}(x)\partial_i f \partial_j g$ будет вырожденной скобкой Пуассона.

b) Проверьте, что ограничение этой скобки на сферу радиуса r с центром в нуле будет невырождено и найдите соответствующую симплектическую форму.

c) Найдите образ построенных скобки Пуассона и симплектической формы при стереографической проекции на плоскость, касающуюся сферы в южном полюсе.

Определение. *(Гладкая) риманова метрика на многообразии* – это (гладкое) поле положительно определенных квадратичных форм в касательных пространствах к точкам многообразия. Если многообразие комплексно, а формы в точках эрмитовы, то рассматриваемая метрика называется *эрмитовой. Пространство линейных элементов* многообразия, снабженного римановой метрикой, – это множество всех единичных касательных векторов относительно рассматриваемой метрики: объединение единичных сфер во всех касательных пространствах

11. Докажите, что на всяком гладком многообразии существует риманова метрика, и если метрика бесконечно-гладка, то соответствующее пространство линейных элементов является бесконечно-гладким многообразием.

12. Докажите, что на всякой группе Ли существует как левоинвариантная риманова метрика (т.е. инвариантная относительно всех левых сдвигов $x \mapsto gx$), так и правоинвариантная.

13. Докажите, что на всякой ортогональной группе $SO(n)$ существует би-инвариантная метрика.

14. Найдите образ индуцированной из объемлющего пространства метрики при стереографической проекции единичной окружности на плоскости и единичной двумерной сферы в $\mathbb{R}^3$.