Дифсистемы 2015 4 модуль
Записки к лекции 8

Тензорные поля на многообразиях

Напоминание: Тензор типа (p,q) на пространстве V

Опр1: $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ т.чтобы при замене координат $x \to \tilde{x}$ где $c^i_j = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}$, $d^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}$ - якобиевы матрицы выполняется $\tilde{T}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = T^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q} c^{i_1}_{k_1} \dots c^{i_p}_{k_p} d^{l_1}_{j_1} \dots d^{l_q}_{j_q}$

Или, эквивалентно:

Опр2: Элемент пр-ва $\underbrace{V \otimes \dots V}_{p} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{q}$ линейных функционалов на наборах p-ковекторов и q-векторов

Примеры: векторы - функции на ковекторах и наоборот
операторы - функции на парах вектор-ковектор
билин. формы - функции на парах векторов

Следствие: Тензоры типа (p,q) можно складывать и умножать на числа $\Rightarrow$ они образуют векторное пространство, $\dim T^{(p,q)} = n^{p+q}$

Что ещё можно делать с тензорами

Умножение: $A \in T^{(p,q)}$, $B \in T^{(r,s)} \Rightarrow A \otimes B \in T^{(p+r, q+s)}$

$A \sim A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$, $B \sim B^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \Rightarrow A \otimes B \sim A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \cdot B^{i_{p+1} \dots i_{p+r}}_{j_{q+1} \dots j_{q+s}}$

Операция очевидно тензорная, линейная и ассоциативная.

Пример: $v \in V$, $w \in V^* \Rightarrow v \otimes w \in V \otimes V^*$ - оператор A

$A^i_j = v^i \cdot w_j$, в базисе где $v = e_1$, $\tilde{v}^i = \delta^i_1 \Rightarrow$

$A^i_j = \delta^i_1 \tilde{w}_j$ $\quad A \sim \begin{pmatrix} \tilde{w}_1 & \tilde{w}_2 & \dots & \tilde{w}_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

2) Ещё пример тензорной операции – перестановка индексов одного типа:

$$T \sim T^{i_1 \dots i_k \dots i_l \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \Rightarrow$$

$$S \sim S^{i_1 \dots i_k \dots i_l \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = T^{i_1 \dots i_l \dots i_k \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$$ тоже тензор.

Или, что то же самое:

$T(w_1 \dots w_k \dots w_l \dots w_p, v_1 \dots v_q)$ – полилинейный ф-л $\Rightarrow$

$S(w_1 \dots w_l \dots w_k \dots w_p, v_1 \dots v_q) = T(w_1 \dots w_l \dots w_k \dots w_p)$ тоже полилинейный

<u>Замечание</u>: Перестановка индексов разных типов очевидно не тензорная операция

$S \sim S^j_i = T^i_j \sim T$ не будет (1,1) тензором.

<u>Обобщение</u>: $\sigma \in S_q$ – перестановка, $T \sim T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ тензор

$$\Rightarrow \sigma(T) \sim \sigma(T)^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = T^{i_1 \dots i_p}_{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(q)}}$$ тензор того же типа

<u>Свёртка</u>: $T \in T^{(p,q)}$, $T \sim T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \Rightarrow$

$$S^{i_1 \dots i_{p-1}}_{j_1 \dots j_{q-1}} = T^{i_1 \dots i_k \Gamma i_{k+2} \dots i_p}_{j_1 \dots j_l \Gamma j_{l+2} \dots j_q}$$ тензор типа $(p-1, q-1)$

тензорность и линейность очевидные

<u>Пример</u> $A \sim a^i_j$ оператор $^{(1,1)}$ $\operatorname{tr} A = a^i_j$ – скаляр $^{(0,0)}$

<u>Симметризация</u>: Пусть T – тензор типа $(0, q)$, т.е. функционал на $V^*, \dots V_q$ – набор векторов. Тогда

$$T^{sym}(V_1 \dots V_q) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} T(V_{\sigma(1)} \dots V_{\sigma(q)})$$ очевидно тоже тензор того же типа

Альтернирование $T \in T^{(0,q)}$ тогда

$$T^{alt}(v_1 \dots v_q) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} (-1)^{\sigma} T(v_{\sigma(1)} \dots v_{\sigma(q)})$$ очевидно тоже будет тензором того же типа

Замечание: Тензора типа (p,q) можно симметризовать или альтернировать отдельно по верхним или нижним индексам

Пример Для $(0,2)$: $T = T \sim T_{ij}$

$$T^{sym}_{ij} = \frac{(T_{ij} + T_{ji})}{2} \qquad T = T^{alt} + T^{sym}$$

$$T^{alt}_{ij} = \frac{(T_{ij} - T_{ji})}{2}$$

Замечание Для операторов (тензоров $(1,1)$) говорят о (кососимметричность бессмысленно инвариантным образом в отсутствие дополнительных структур это понятие не определено

Опр: Тензорное поле $T(x)$ на M типа (p,q) [redacted]

Кососимметрические тензоры типа $(0,k)$

тип $(0,k) \Rightarrow$ из пространства $\underbrace{U^* \otimes \dots \otimes U^*}_{k}$

Замечание (обозначения) Пусть $e^1, \dots e^n$ - базис в U^* при замене: $\tilde{e}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} e^j$ Если взять дифф-л dx^i, то при замене $d\tilde{x}^i = d\tilde{X}^i(x^1, \dots x^n) = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} dx^j$

Аналогично (двойственно) для $\partial/\partial x^1, \dots \partial/\partial x^n$

Дифференциальная форма записи:

$\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots \frac{\partial}{\partial x^n}$ - базис в векторах

$dx^1, \dots dx^n$ - базис в ковекторах

4) Итак, для $V^*\otimes V^*$ - тензоров типа $(0,2)$

$e^1,\dots,e^n$ - базис в V^*

$e^i\otimes e^j$ - базис в $V^*\otimes V^*$

$e^i\otimes e^j+e^j\otimes e^i$, $i\le j$ - базис в $(V^*\otimes V^*)^{sym}$

$e^i\otimes e^j-e^j\otimes e^i$, $i<j$ - базис в $(V^*\otimes V^*)^{alt}$

<u>Обозначение</u>: $e^i\otimes e^j-e^j\otimes e^i=e^i\wedge e^j=dx^i\wedge dx^j$

внешнее произведение

$$\frac{e^i\otimes e^j+e^j\otimes e^i}{2}=dx^i dx^j$$

<u>Утв.</u> $T\in(T^{(0,k)})^{alt}=(V^*\otimes\dots V^*)^{alt}$, $k>\dim V\Rightarrow T\equiv 0$ (очевидно)

$k=\dim V\Rightarrow T$ определён однозначно с точ. до пропорциональности: $T_{i_1\dots i_q}=t\cdot\varepsilon_{i_1\dots i_k}$, где $\varepsilon_{i_1\dots i_k}$ полностью антисимметрический тензор (тоже очевидно)

Базис в $(V^*\otimes\dots V^*)^{alt}$:

$$e^{i_1}\wedge\dots\wedge e^{i_k}=dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}=\sum_{\sigma\in S_k}(-1)^\sigma dx^{\sigma(i_1)}\otimes\dots\otimes dx^{\sigma(i_k)}\qquad i_1<\dots<i_k$$

$\omega=T_{i_1\dots i_k}dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$ - внешняя форма или дифференциальная форма степени $\deg\omega=k$

<u>Замечание</u>: тензорное произведение кососимметрических тензоров не будет кососимметрическим, а хотелось бы. Нужна другая операция

$\omega_1=R_{i_1\dots i_p}dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}$, $\omega_2=S_{j_1\dots j_q}dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_q}$

$$\Rightarrow\omega_1\wedge\omega_2=\frac{1}{p!\,q!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}}(-1)^\sigma R_{\sigma(k_1)\dots\sigma(k_p)}S_{\sigma(k_{p+1})\dots\sigma(k_{p+q})}\,dx^{k_1}\wedge\dots\wedge dx^{k_{p+q}}$$

Утв: внешнее произведение ассоциативно, билинейно и кососимметрично.

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{pq}\, \omega_2 \wedge \omega_1$$

Следствие: Кососимметрические тензоры образуют градуированно-коммутативную алгебру относительно внешнего произведения. $\Lambda^* V = \bigoplus \Lambda^k(V) = \bigoplus (V^* \otimes \dots \otimes V^*)^{alt}$

Пример: $dx \wedge dy$ на $\mathbb{R}^2$ – ориентированная площадь

$dx \wedge dy(v_1, v_2) = v_1^x v_2^y - v_2^x v_1^y$ – площадь параллелограмма

Градиент кососимметрического тензора

$$(dT)_{i_1 \dots i_{k+1}} = \sum_{m=1}^{k+1} (-1)^{m+1} \frac{\partial T_{i_1 \dots \hat{i_m} \dots i_k}}{\partial x^{i_m}}$$

Утв: $T \in \Lambda^k V \Rightarrow dT \in \Lambda^{k+1} V$

посмотрим для 1-форм:

$$(d\tilde{T})_{i_1 i_2} = \frac{\partial \tilde{T}_{i_2}}{\partial \tilde{x}^{i_1}} - \frac{\partial \tilde{T}_{i_1}}{\partial \tilde{x}^{i_2}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{i_1}}\left(T_j \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^{i_2}}\right) - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{i_2}}\left(T_\ell \frac{\partial x^\ell}{\partial \tilde{x}^{i_1}}\right) =$$

$$= \frac{\partial T_j}{\partial \tilde{x}^{i_1}} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^{i_2}} - \frac{\partial T_\ell}{\partial \tilde{x}^{i_2}} \frac{\partial x^\ell}{\partial \tilde{x}^{i_1}} = \frac{\partial T_j}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^{i_1}} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^{i_2}} -$$

$$- \frac{\partial T_k}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^{i_2}} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^{i_1}} = \left(\frac{\partial T_j}{\partial x^k} - \frac{\partial T_k}{\partial x^j}\right) \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^{i_1}} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^{i_2}} = (dT)_{kj} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^{i_1}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{i_2}}$$

действительно тензорная операция.

Внешний дифференциал.

$$\omega = \sum T_{i_1 \dots i_k}\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \qquad i_1 < \dots < i_k$$

$$d\omega = \sum_{i_0} \frac{\partial T_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^{i_0}}\, dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \dots dx^{i_k} \qquad i_1 < \dots < i_k$$

Утв: $d\omega = \sum (dT)_{i_1 \dots i_{k+1}}\, dx^{i_1} \wedge \dots dx^{i_{k+1}}$

6) Утв: $d^2\omega = d(d\omega) \equiv 0 \quad \forall \omega \in \Lambda^* V$

Д-во: $\omega = T_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots dx^{i_k}$

$$d^2\omega = \frac{\partial^2 T_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^r \partial x^s} dx^r \wedge dx^s \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

свёртка симметричного с антисимм. даёт ноль

Утв: $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2$

~~Инвариантно: $\omega \in \Lambda^k V$~~ x^1

Инвариантное описание:

пусть $\omega = \omega_i dx^i$ - 1-форма

$X = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = w^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ - векторные поля.

$\omega(X)$ - число (функция) $\omega(X) = \omega_i v^i$

$X(\omega)$ - 1-форма $X(\omega) = v^i \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} dx^j$

Тогда $d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])$

В общем случае

$$d\omega(X_1, \dots X_{k+1}) = \sum (-1)^i X_i(\omega(X_1, \dots \hat{X_i}, \dots X_{k+1})) +$$

$$+ \sum (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots \hat{X_i}, \dots \hat{X_j} \dots X_{k+1})$$