

**Дискретная математика**  
**Семинар 17**  
ВШЭ, факультет математики  
первый курс, четвёртый модуль

1. Докажите, что эф по параметру  $m$  сумм  $S_m(n)$  равна  $\frac{e^{nz}-1}{e^z-1}$ . Выведите из этого утверждение задачи 7 предыдущего семинара.
2. Рассмотрим выражение  $S_m(n)$  как многочлен от  $n$ . Для  $n \geq 0$  выразите значение многочлена  $S_m(-n)$  через значения в положительных точках. Докажите, что  $S_m(n)$  делится на  $n(n-1)$  при всех  $m$ , а при чётных  $m$  ещё и на  $(n-\frac{1}{2})$ .

Определим многочлены Бернулли  $B_n(x)$  по формуле

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k x^{n-k}.$$

3. Докажите формулу для эф многочленов Бернулли

$$\sum_{m \geq 0} B_m(x) \frac{z^m}{m!} = \frac{ze^{xz}}{e^z - 1}.$$

4. Докажите, что  $S_{m-1}(n) = \frac{1}{m}(B_m(n) - B_m(0))$ .
5. Докажите, что

$$B_n(x) = \frac{\frac{d}{dx}}{e^{\frac{d}{dx}} - 1} x^n.$$

6. Докажите, что многочлены Бернулли однозначно определены условием

$$\int_x^{x+1} B_n(y) dy = x^n.$$

7. Докажите, что  $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$ .