Листок 11. Интегралы по кривым и поверхностям

Анализ, 2 курс, **26.05.2015**

11⋄1 **а)** Найти длину и центр тяжести части *астроиды* $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, расположенной в первой координатной четверти.

б) Найти площадь поверхности, полученной вращением астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ вокруг оси Oy.

11⋄2 (*Теорема Гульдена.*) Площадь поверхности, образованной вращением дуги плоской гладкой кривой вокруг оси, лежащей в плоскости дуги и ее не пересекающей, равен произведению длины дуги на длину окружности, описываемой ее центром масс.

11⋄3 На плоскости дана гладкая замкнутая несамопересекающаяся кривая γ.

а) Чему равен интеграл $\oint_\gamma (xdy - ydx)$? **б)** А интеграл $\oint_\gamma \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$?

Приведите ответы в геометрических терминах.

11⋄4 Говорят, что в пространстве заданы

- плотность заряда $\rho(x, y, z, t)$;
- плотность тока $\vec{j}(x, y, z, t)$;
- "электрическое поле" (точнее, *электрическая индукция*) $\vec{D}(x, y, z, t)$;
- "магнитное поле" (точнее, *напряженность магнитного поля*) $\vec{H}(x, y, z, t)$,

если гладкая функция $\rho\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ и гладкие вектор-функции $\vec{j}, \vec{D}, \vec{H}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ во всех точках $\mathbb{R}^4$ удовлетворяют *уравнениям Максвелла* (точнее, это только 2 из 4 уравнений Максвелла):

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \qquad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Докажите, что плотность заряда и плотность тока всегда удовлетворяют *закону сохранения заряда*:

$$\oint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dv$$

для любой области $V \subset \mathbb{R}^3$, ограниченной гладкой замнкнутой поверхностью ∂V.