Динамические системы, семинар 27.05.2015

1. Выпишите как выглядят следующие тензора на плоскости в новых координатах $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$) если задано их действие на векторах $v = (x, y)$:

a) линейный функционал $l(v) = 2x + 3y$ координаты $\widetilde{x} = x + 2y$, $\widetilde{y} = 2y$

b) квадратичную форму $b(v) = x^2 + 2xy$ в тех же координатах

c) кососимметричная билинейная форма $\omega(v, w) = v_1 w_2 - v_2 w_1$ в[1] координатах $\widetilde{x} = 2x + y$, $\widetilde{y} = x + y$.

Напоминание: Если A, B два векторных пространства, и $a \in A, b \in B$, а $f \in A^*, g \in B^*$, то $A^* \otimes B^*$ есть пространство полилинейных функционалов на $A \times B$, где элемент $f \otimes g$ принимает на паре (a, b) значение $f(a) \cdot g(b)$.

2. Рассмотрим тензорное произведение $X = V \otimes W$ конечномерных векторных пространств V и W размерностей m и n, соответственно. Пусть $A : V \to V$, $B : W \to W$ – линейные операторы, $A \otimes B : X \to X$ – их тензорное произведение (как его определить?).

a) Докажите, что $\det(A \otimes B) = (\det A)^n (\det B)^m$.

b) Фиксируем базисы в пространствах V и W. Постройте канонически ассоциированный с ними базис тензорного произведения X. Выразите матрицу оператора $A \otimes B$ через матрицы операторов A и B.

Напоминание: $\bigwedge^2 V = (V^* \otimes V^*)^{alt}$ – кососимметрические полилинейные функционалы на $V \times V$ (или кососимметрические (0,2)-тензора на V) с базисом $e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i$, где $(e^1, \ldots, e^n) = (dx^1, \ldots, dx^n)$ базис в V^*. Аналогично для форм старших степеней.

3. В $\mathbb{R}^2$ найдите значение формы $\omega = x^2 \cdot dx^1 \wedge dx^2$ на паре векторов $v_1 = (1, 0)$ $v_2 = (2, 3)$ из пространства $T_{(-1,-1)}\mathbb{R}^2$

4. Найдите на $\mathbb{R}^2$ 1-форму ω такую что $\omega(L) \equiv 1$, где L – векторное поле $L(x^1, x^2) = \partial_{x^1} + \frac{1}{1+(x^1+x^2)^2}\partial_{x^2}$

5. В пространстве $\mathbb{R}^n$ для фиксированного набора векторов $(v_1, \ldots, v_n)$ и ковекторов $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$

a) Какое значение принимают на паре векторов (v_1, v_2) 2-формы $dx^1 \wedge dx^2$ и $\xi^1 \wedge \xi^2$, каков смысл этой величины?

b) Какое значение принимают на наборе $(v_1, \ldots v_n)$ n-формы $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ и $\xi^1 \wedge \cdots \wedge \xi^n$?

6. В $\mathbb{R}^3$ найдите в координатах внешнее произведение форм $\omega_1 = dx^1 + dx^2$ и $\omega_2 = x^3 \cdot dx^1 \wedge dx^2 + x^2 \cdot dx^1 \wedge dx^3$.

---

[1] Здесь и далее индексы "1"и "2"отвечают "x"и "y соответственно