Дискретная математика
Семинар 18
ВШЭ, факультет математики
первый курс, четвёртый модуль

1. Пусть $f(x)$ функция, такая что $\sum_{k,d\geq 1} |f(x/kd)| < \infty$ для всех x. Докажите, что $g(x) = \sum_{d\geq 1} f(x/d)$ титтк $f(x) = \sum_{d\geq 1} \mu(d) g(x/d)$.

2. Пусть m делится на r простых чисел $p_1, \dots, p_r$. Докажите, что

$$\varphi(m) = m(1 - \frac{1}{p_1}) \dots (1 - \frac{1}{p_r}).$$

3. Пусть $F(x) = \sum_{1\leq k\leq x} \varphi(k)$. Докажите, что

$$\sum_{d\geq 1} F(x/d) = \frac{1}{2}[x][1+x].$$

4. Выпишите явную формулу для $F(x)$.

5. Рассмотрим две дроби $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{0}$. Добавим между ними дробь $\frac{0+1}{1+0} = \frac{1}{1}$, получив последовательность дробей $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}$. Будем продолжать эту процедуру, добавляя на каждом следующем шаге между дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{m'}{n'}$ дробь $\frac{m+m'}{n+n'}$. Вычислите первые пять этажей получившегося бинарного дерева (на каждом следующем этаже пишутся добавленные на соответствущем шаге дроби). В этом дереве каждая дробь имеет вид $\frac{m+m'}{n+n'}$, где $\frac{m}{n}$ ближайший предок сверху слева, а $\frac{m'}{n'}$ сверху справа. Получается так называемое дерево Штерна-Броко.

6. Докажите, что если $\frac{m}{n}$ и $\frac{m'}{n'}$ две последовательные дроби в построении из предыдущей задачи, то $m'n - nm' = 1$.

7. Докажите, что любая дробь в дереве Штерна-Броко несократима и встречается не более одного раза.

8. Докажите, что каждая несократимая дробь встречается в дереве Штерна-Броко.

9. Число каких элементов дерева Штерна-Броко вычисляет функция $F(n)$ из задачи 3?