

## ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, СЕМИНАР 03.06.2015

**1.** Пусть  $\mathbb{E}^3$  - трёхмерное евклидово пространство со скалярным произведением  $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$ . Сопоставим каждому вектору  $v \in \mathbb{E}^3$  следующие две дифференциальные формы:

$$\begin{aligned} \wedge^1(\mathbb{E}^3) \ni \theta_v : u \mapsto \theta_v(u) &= \langle v, u \rangle \\ \wedge^2(\mathbb{E}^3) \ni \omega_v : (u, w) \mapsto \omega_v(u, w) &= \text{смешанное произведение}(v, u, w) \end{aligned}$$

- a) Запишите формы  $\theta_v, \omega_v$  через базисные ковектора  $dx^1, dx^2, dx^3$
- b) Покажите, что  $\forall u, v \in \mathbb{E}^3$  выполняется  $\theta_u \wedge \theta_v = \omega_{u \times v}$
- c) Покажите, что  $\forall u, v \in \mathbb{E}^3$  выполняется  $\theta_u \wedge \omega_v = \langle u, v \rangle dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$

**2.** Вычислите дифференциалы от следующих форм:

- a)  $xdy \in \mathbb{R}^2$
- b)  $xzdx \wedge dy \in \mathbb{R}^3$
- c)  $z^2ydx \wedge dy \in \mathbb{R}^3$
- d) **hw**  $z^3dx \wedge dy \wedge dz \in \mathbb{R}^3$ .

**3.** Рассмотрим 1-форму  $\omega = dz - ydx$  в  $\mathbb{R}^3$ .

a) Докажите, что ядро её дифференциала одномерно и трансверсально её собственному ядру  $\omega = 0$ : другими словами, ограничение дифференциала  $d\omega$  на ядро  $\text{Ker } \omega$  - невырожденная 2-форма<sup>1</sup>.

b) **hw** Докажите аналогичное утверждение для формы  $dz - \sum_{j=1}^n y_j dx_j$  в  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

c) Докажите, что контактные формы существуют только в нечетной размерности.

**4.** Вычислите внешнее произведение форм  $\omega_1 \wedge \omega_2$ , где

- a)  $\omega_1 = xdy - ydx, \omega_2 = xdy + ydx$ ;
- b) **hw**  $\omega_1 = xdy - ydx, \omega_2 = dy \wedge dz$ ;
- c)  $\omega_1 = dx \wedge dy + dz \wedge dt, \omega_2 = dx \wedge dz + dy \wedge dt$ ;
- d) **hw**  $\omega_1 = xdy \wedge dz, \omega_2 = zydx \wedge dt$ .

**5. \*** **hw** Выпишите комплекснозначную 1-форму на трехмерной Евклидовой сфере в  $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ , ядра которой совпадают с комплексными прямыми, касающимися сферы. Докажите, что последнее поле прямых является контактной структурой: локально задается полем ядер контактной 1-формы.

---

<sup>1</sup> Всякая 1-форма  $\omega$  с таким свойством называется *контактной*