КОНСПЕКТ ЛЕКТОРА, математический анализ, 2 курс, 4 модуль, 2015
А.М. Красносельский

Лекция 1 (30 марта 2015)

Начинаем новую тему — ряды Фурье, интегралы Фурье, преобразование Фурье.

В конце прошлого семестра были введены пространства L_1 и L_2, доказана их полнота, приведены примеры базисов в этих пространствах (для различных областей определения функций, входящих в L_p).

Сейчас расскажу абстрактную теорию евклидовых-гильбертовых пространств, следуя Колмогорову–Фомину. Я предпочитаю писать и говорить «Евклид», но «Эвклид» ничуть не хуже.

Абстрактная теория.

1. Определение евклидова пространства H, скалярное произведение и норма. Пусть есть линейное пространство, причем в нем задана билинейная функция $(\cdot,\cdot)$, удовлетворяющая

$$(x,y)=(y,x),\quad (x,y_1+y_2)=(x,y_1)+(x,y_2),\quad (\lambda x,y)=\lambda(x,y),\quad (x,x)\geqslant 0,\quad (x,x)=0\ \Leftrightarrow\ x=0.$$

Это в случае вещественного пространства и вещественнозначного скалярного произведения. В случае комплексного пространства надо брать комплекснозначное скалярное произведение и чуть изменить аксиоматику:

$$(x,y)=\overline{(y,x)},\quad (x,y_1+y_2)=(x,y_1)+(x,y_2),\quad (\lambda x,y)=\lambda(x,y),\quad (x,x)\geqslant 0,\quad (x,x)=0\ \Leftrightarrow\ x=0.$$

Я буду сейчас говорить о вещественном пространстве, в комплексном абстрактном пространстве все так же.

2. Рассматриваем выражение $(f+tg,f+tg)=(f,f)+2t(f,g)+t^2(g,g)$, оно неотрицательно при всех $t\in\mathbb{R}$, $f,g\in H$. Это справедливо, если и только если дискриминант не положителен, то есть $(f,g)^2\leqslant(f,f)(g,g)\ \Rightarrow\ |(f,g)|\leqslant\sqrt{(f,f)(g,g)}$. $\square$

Из неравенства Коши-Буняковского следует, что величина $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ является нормой, точнее — неравенство треугольника:

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+2(x,y)+\|y\|^2\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2.$$

Неравенство Коши-Буняковского в $L_2(\Omega)$ это имеет вид неравенств

$$\sqrt{\int_{L_2(\Omega)}(f+g)^2d\mu}\leqslant\sqrt{\int_{L_2(\Omega)}f^2d\mu}+\sqrt{\int_{L_2(\Omega)}g^2d\mu}\quad\Leftrightarrow\quad\Big|\int_{L_2(\Omega)}fg\,d\mu\Big|\leqslant\sqrt{\int_{L_2(\Omega)}f^2d\mu}\sqrt{\int_{L_2(\Omega)}g^2d\mu},$$

в пространствах $\mathbb{R}^n$ и ℓ_2 — неравенств

$$\sqrt{\sum(a_n+b_n)^2}\leqslant\sqrt{\sum a_n^2}+\sqrt{\sum b_n^2}\quad\Leftrightarrow\quad|\sum a_nb_n|\leqslant\sqrt{\sum a_n^2}\cdot\sqrt{\sum b_n^2}.$$

В $\mathbb{R}^n$ сумма конечная, в ℓ_2 — бесконечная.

3. Непрерывность линейных операций: $x_n \to x,\ y_n \to y,\ \lambda_n \to \lambda\ \Rightarrow\ (\lambda_n x_n, y_n) \to (\lambda x, y)$.

4. Определения. **Ортогональная система** — множество векторов, попарно ортогональных. **Полная ортогональная система** — наименьшее содержащее эту систему замкнутое линейное подпространство совпадает со всем пространством, называется также *ортогональным базисом*.

Обратите внимание: в этом определении полнота системы означает, что если взять все конечные линейные комбинации элементов системы, а потом замкнуть полученное множество, то получится все пространство. Иначе можно говорить о том, что каждый элемент пространства представим в виде сходящегося ряда из элементов системы.

Теорема об ортогонализации. *Пусть есть линейно независимая система x_n в евклидовом пространстве. Тогда $\exists$ ортонормированная система $y_n = \sum_{k=1}^n a_{n,k} x_k$ с невырожденными матрицами $\{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$, при этом $E_n = span\{x_1, \dots, x_n\} = span\{y_1, \dots, y_n\}$, $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n \subset \dots$.*

Сепарабельное пространство — в котором существует счётное всюду плотное множество

Следствие. В сепарабельном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

5. Примеры. Основные: конечномерное пространство, ℓ_2, L_2. Упомяну еще пространство абсолютно непрерывных функций, имеющих суммируемую с квадратом производную со скалярным произведением $(x, y) = (x, y)_{L_2} + (x', y')_{L_2}$.

Банахово пространство. Критерий евклидовости — тождество параллелограмма. *Гильбертово пространство* — полное сепарабельное евклидово пространство.

6. Ограничимся сепарабельными пространствами. Пример несепарабельного пространства: множество функций на $[0, 1]$ отличных от нуля в счетном множестве точек t_i, таких что ряд $\sum x^2(t_i)$ сходится; $(x, y) = \sum x(t_i) y(t_i)$. Очевидно есть континуальная ортогональная система.

7. В гильбертовом пространстве всякая ортогональная система не более чем счетная. В самом деле, берем ортонормированную систему φ_α, окружим каждый элемент шаром радиуса $1/2$, шары не пересекаются (по теореме Пифагора). В каждом есть элемент счетного всюду плотного множества, поэтому число шаров не более чем счетно.

8. Абстрактный ряд Фурье. Пусть есть ортонормированная система e_k в гильбертовом пространстве H. Для каждого элемента $x \in H$ рассмотрим числа $c_k = (x, e_k)$ — коэффициенты Фурье и составим формальный ряд Фурье $\sum c_k e_k$. Возникают вопросы: сходится ли РФ (стремятся ли частичные суммы по норме H), если сходится, совпадает ли сумма с элементом x. Отдельный вопрос: можно написать РФ с какими-то произвольными числами c_k, когда это будет РФ от некоторого элемента.

Важно понимать, что в абстрактном пространстве, про элементы которого мы не знаем ничего, ну или не хотим предполагать ничего, существует один вид сходимости — сходимость по норме. В конкретных реализациях абстрактного пространства H могут быть и другие сходимости, например, в L^2 бывает поточечная сходимость и разные другие.

9. Свойство минимальности. Положим $S_n(x) = \sum_{k=1}^n (x, e_k)e_k$, $H_n = \{y = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k\} \subset H$.

Лемма. *У элементов $S_n(f)$ и f одинаковые первые n коэффициентов Фурье. Поэтому для всех $y_n \in H_n$ справедливо равенство $(f - S_n(f), y_n) = 0$.*

Лемма следует из $(f - S_n(f), e_j) = (f - \sum_{k=1}^n (f, e_k)e_k, e_j) = 0$ при $j = 1, \ldots, n$. □

Свойство минимальности. *Пусть есть $f \in H$. Тогда $\|f - S_n(f)\| = \inf_{y_n \in H_n} \|f - y_n\|$.*

Утверждение следует из леммы и из равенств (теорема Пифагора)

$$(f - y_n)^2 = (f - S_n(f) + S_n(f) - y_n)^2 =$$

$$= (f - S_n(f))^2 + 2(f - S_n(f), S_n(f) - y_n) + (S_n(f) - y_n)^2 = (f - S_n(f))^2 + (S_n(f) - y_n)^2.$$

10. **Неравенство Бесселя.** Положим $c_k = (f, e_k)$. Очевидно, что $\|S_n(f)\|^2 = \sum_{k=1}^n c_k^2$. Теперь

$$\|f - S_n(f)\|^2 = \|f\|^2 - 2(f, S_n(f)) + \|S_n(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|S_n(f)\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2 > 0.$$

Это выполнено при всех n, следовательно ряд из квадратов коэффициентов Фурье сходится и верно неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^\infty c_k^2 \leqslant \|f\|^2.$$

11. **Замкнутая система**: если $\forall f \in H$ выполнено *равенство Парсеваля*: $\sum\limits_{k=1}^\infty c_k^2 = \|f\|^2$.

Подчеркнуть, что пока никаких предположений о полноте системы e_n не делалось.

11. **Теорема.** *В сепарабельном евклидовом пространстве полная ортонормированная система замкнута и наоборот.*

Доказательство в обе стороны.

Пусть система замкнута, тогда $\|f - S_n(f)\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2$ стремится к нулю, поэтому линейные комбинации элементов e_n плотны в H, следовательно, система полна. □

Пусть система полна. Тогда любой $f \in H$ можно аппроксимировать с любой точностью линейной комбинацией y_n, Но $S_n(f)$ дает ещё лучшую аппроксимацию по свойству минимальности, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ величина $\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2$ меньше ε и выполнено равенство Парсеваля. □

12. Полные пространства. Раньше мы, как ни странно, не пользовались полнотой евклидова пространства. Поэтому представленные факты были выполнены, например, для такого уродского пространства: множество всех гладких функций (или непрерывных) со скалярным произведением из L_2 — это пространство не является полным, по норме L_2 последовательность непрерывных-гладких функций может сходиться к разрывной функции.

Теорема Рисса-Фишера. *Пусть e_n — ортонормированная система в полном евклидовом пространстве, пусть числа c_k такие, что ряд из их квадратов сходится. Тогда они являются коэффициентами Фурье некоторого $f \in H$ и $\|f\|^2 = \sum c_n^2$.*

Доказательство. Положим $f_n = \sum_{k=1}^n c_k e_k$. Так как $\|f_{n+k} - f_n\|^2 = \sum_{i=n+1}^{n+k} c_i^2$ и ряд $\sum c_n^2$ сходится, то f_n — фундаментальная последовательность, значит она сходится к некоторому f. Теперь $(f, e_k) = (f_n, e_k) + (f - f_n, e_k)$, но $|(f - f_n, e_k)| \leqslant \|f - f_n\|$, и $(f_n, e_k) = c_k$ при $n \geqslant k$. поэтому $(f, e_k) = c_k$. Так как $\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2 = \|f - f_n\|^2 \to 0$, то всё доказано. □

13. Критерий полноты системы.

Теорема. *Для того, чтобы ортонормированная система e_n была полна, необходимо и достаточно, чтобы в H не было ненулевых элементов, ортогональных всем e_n.*

Доказательство. Пусть система полна. Тогда она замкнута и справедливо равенство Парсеваля. Если f ортогонален всей системе, то все c_n равны нулю. Отсюда в силу Парсеваля $f = 0$.

Пусть система не полна. Тогда она не замкнута и существует $g \neq 0$: $(g, g) > \sum_{k=1}^\infty c_k^2$, где $c_k = (g, e_k)$. В силу Рисса-Фишера есть такой элемент f, что $c_k = (f, e_k)$, $(f, f) = \sum_{k=1}^\infty c_k^2$. Элемент $f - g$ не равен нулю и он ортогонален всем e_n. □

Тригонометрические ряды. В $L_2 = L_2(-\pi, \pi)$ рассмотрим тригонометрическую систему функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}.$$

Проверим, что она ортогональная и что она нормированная в конкретном пространстве $L_2 = L_2(-\pi, \pi)$ или в пространстве $L_2 = L_2(0, 2\pi)$ (так как тригонометрические функции периодические, то чаще всего это все равно) рассмотрим конкретную. Она ортонормированная, она полная (я про это скажу подробнее), поэтому всё, что сказано про абстрактное гильбертово пространство, всё справедливо для этой ситуации. Однако, есть куча вопросов совершенно неабстрактных. Я перечислю кое-что в том направлении.

1. Выпишем тригонометрический ряд. Когда он является РФ от какой-то функции? Когда он является РФ функции из L_2, мы знаем — должен сходиться ряд из квадратов коэффициентов. А что ещё можно сказать?

2. Коэффициенты РФ можно построить и по функции из L_1.

3. Когда РФ сходится в точке t_0? Поточечно? Равномерно?

4. Когда РФ можно дифференцировать-интегрировать?

5. Вот есть элемент пространства L_2, ему соответствует РФ, к какому именно представителю элемента сходится ряд?

6. Приближает ли РФ непрерывной функции эту функцию равномерно?

7. С точки зрения близости в пространстве L_2 РФ — наилучший. А точки зрения пространства C? Является ли РФ в каком-то смысле хорошим приближением в C?

Оказалось, что многие вопросы в этом направлении — реально сложные и интересные.

Литературные комментарии. Работала толпа людей: дю Буа-Реймонд, Шварц, Фейер, Дирихле, Жордан, Фурье, Абель и Пуассон, Риман, Кантор, Гейне, Лебег, Валле-Пуссен, Остроградский, Лобачевский, Дини, Липшиц, Чебышев, Крылов, Колмогоров.

Среди суммируемых функций есть такие, чей РФ расходится всюду (пример Колмогорова). Проблему Лузина: если ли в L_2 функции, для которых РФ расходится на множестве положительной меры решил Карлесон в 1966 (ответ отрицательный).

Тригонометрические ряды. Итак, в $L_2 = L_2(-\pi, \pi)$ рассмотрим систему функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}.$$

Проверим, что она ортогональная и что нормированная в L_2.

Это полная система в L_2.

С точностью до теоремы Вейерштрасса — это была такая теорема, что множество многочленов плотное в C (следовательно, и в L_2, и в L_1,), а множество тригонометрических многочленов плотно в замкнутом подпространстве периодических функций в C, это декларировалось, это следовало из теоремы Бернштейна, но она не была доказана. Чуть позднее будет явно выписана последовательность тригонометрических многочленов, которая равномерно приближает всякие функции.

Берем характеристическую функцию измеримого множества G. Её можно приблизить в L_1 и в L_2 сколь угодно близко, характеристической функцией замкнутого множества. Характеристическую функцию замкнутого множества легко приблизить в L_2 и в L_1, непрерывной функцией. Достаточно на открытом дополнении на открытых интервалах сделать в основном 0, и крытые вертикальные линейные функции от 0 до 1. Теперь любую ограниченную измеримую функцию можно приблизить конечной линейной комбинацией характеристических, значит её можно приблизить в L_1 и в L_2 непрерывной функцией.

Лекция 2 (06 апреля 2015)

На предыдущей лекции мы начали ряды Фурье (РФ) в в абстрактном гильбертовом пространстве, обсудили связь понятий полноты и замкнутости ортонормированных систем, обсудили неравенство Бесселя и равенство Парсеваля.

Далее, мы перешли к самому главному гильбертовому пространству и к самой главной системе в нём — тригонометрической системе в $L_2 = L_2(-\pi, \pi)$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}.$$

Начну с простейших задач, которые решаются общей теорией в L_2.

1. Формальный ряд (интегралы Лебега, но я их буду писать как интегралы Римана)

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx). \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dx.$$

Проинтегрировали, получили формулы для коэффициентов.

Замечание: этот вид немножко отличается от абстрактного. Множители $1/\sqrt{\pi}$ соединились, получилось разложение по ненормированным функциям.

2. Положим $S_k(x) = \dfrac{1}{2}a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{k} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ — частичная сумму формального РФ. Про неё справедливо всё, что говорилось про абстрактные РФ: минимальное свойство, неравенство Бесселя, равенство Парсеваля.

Лемма. *У функций S_k и f одинаковые первые $2k+1$ коэффициентов Фурье. Поэтому для всех тригонометрических многочленов T_k степени не выше k справедливо равенство $(f - S_k, T_k) = 0$.*

3. **Минимальное свойство.** Пусть $f \in L_2$. Тогда из всех тригонометрических многочленов T_k степени не выше k частичная сумма РФ f находится ближе всех к функции f. То есть $a_n, b_n \to 0$, выполнены неравенство Бесселя и равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f^2(x)dx \qquad \text{и} \qquad \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f^2(x)dx.$$

Еще раз напоминаю про множитель $1/\pi$ и откуда он берётся!

Далее я в основном буду рассказывать о задачах, связанных с тригонометрическими рядами, которые не решаются общей теорией в L_2.

Соответствие суммируемой функции ряда. Коэффициенты Фурье по соответствующим формулам могут быть посчитаны для любой $f \in L_1$ (в частности, для $f \in L_1 \setminus L_2$). Более того, в различных задачах важны именно такие ряды.

Сходимость в L_2 ничего не говорит о сходимости РФ в конкретной точке, а это важно.

Частичные суммы РФ — непрерывные и даже бесконечно гладкие функции. Естественны вопросы о равномерной сходимости РФ и его производных.

Простые теоремы типа: РФ равномерно сходится к предельной непрерывной функции, например, если $|a_n|, |b_n| \leqslant n^{-1-\delta}$. Это очевидная теорема, но с точки зрения использования — бессмысленная. Важные теоремы имеют вид: "Пусть f удовлетворяет условию ... Тогда РФ сходится ...".

4. **Лемма Римана.** *Если* $f \in L_1(a,b)$, *то* $\lim\limits_{p\to\infty}\int_{[a,b]} f(x)\sin(px)\,dx = \lim\limits_{p\to\infty}\int_{[a,b]} f(x)\cos(px)\,dx = 0.$

4.0. Сначала доказать для $f \in C^1$ интегрированием по частям, интеграл Лебега совпадает с интегралом Римана. Это не доказательство, это иллюстрация.

4.1. Как я недавно рассказывал, непрерывные функции плотны в L_1.

4.2. Теперь непрерывную функцию приблизим в C, а, значит, и в L_1 ступенчатой, настоящей ступенчатой, с конечным количеством ступенек, как из первого курса.

4.3. Для каждой фиксированной ступенчатой всё очевидно: посчитаем интеграл от каждой ступеньки. Случай $f = const$ — это гладкий случай. □

5. Пусть $Q(x)$ — периодическая ограниченная с периодом $2T$ антисимметрическая функция: $Q(x+T) = -Q(x)$, как раз как синус и косинус. Гладкость, абсолютную непрерывность и даже непрерывность (!) не предполагаем.

Обобщенная лемма Римана. *Если* $f \in L_1(a,b)$, *то* $\lim\limits_{p\to\infty}\int_{[a,b]} f(x)Q(px)\,dx = 0.$

Пользуемся непрерывностью в среднем функции f: если $f \in L_1(a,b)$, то при $\sigma > 0$

$$\lim_{h\to 0}\int_a^{b-\sigma} |f(x+h) - f(x)|dx = 0.$$

Для непрерывной функции она следует из теоремы Кантора, для функции из L_1 достаточно приблизить f непрерывной.

Теперь $I = \int_{[a,b]} f(x)Q(px)\,dx = \int_{[a+\frac{T}{p}, b+\frac{T}{p}]} f(x+\frac{T}{p})Q(px+T)\,dx,$

из антисимметричности $I = -\int_{[a+\frac{T}{p}, b+\frac{T}{p}]} f(x+\frac{T}{p})Q(px)\,dx,$

из абсолютной непрерывности интеграла $I = -\int_{[a,b]} f(x+\frac{T}{p})Q(px)\,dx + o(1).$

Поэтому

$$2|I| = \left|\int_{[a,b]} f(x)Q(px)\,dx - \int_{[a,b]} f(x+\frac{T}{p})Q(px)\,dx\right| + o(1) \leqslant \sup|Q| \int_a^b |f(x+h) - f(x)|dx + o(1).$$

Доказали. Кстати, справедлива непрерывность в среднем и для $(-\infty, \infty)$. □

6. **Скорость сходимости коэффициентов Фурье к нулю.**

Сходимость к нулю коэффициентов РФ следует из леммы Римана, если $f \in L_2$, то из Бесселя

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f^2(x)dx$$

следует что-то вроде $n^{-1/2-\varepsilon}$. **Формально, конечно, это не так:** из того, что сходится ряд $\sum |y_n|$ вовсе не следует, что $|y_n|n \to 0$ или ограничено. Пример: $y_{8^k} = 2^{-k}$, остальные члены ряда равны нулю. Тогда ряд сходится, однако $|y_n| = n^{-1/3}$ для соответствующих n.

7. Гладкость добавляет скорости сходимости: каждая лишняя производная 2π-периодической f добавляет n^{-1} к скорости убывания коэффициентов:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = f(x)\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(nx)dx = -\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(nx)dx.$$

8. Если $f \in BV$ кусочно непрерывна, то $n|a_n|, n|b_n| < \infty \Leftrightarrow |a_n|, |b_n| < c\, n^{-1}$. Докажем для a_n:

$$|a_n| = \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx\right| = \frac{1}{n\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)d\big(\sin(nx)\big)\right| \leqslant \frac{1}{n\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)d(f(x))\right| \leqslant \frac{1}{n\pi}\bigvee_{-\pi}^{\pi} f.$$

9. **Принцип локализации.** Интересуемся, когда $S_k(x) \to f(x)$ ($S_k(x)$ — частичная сумма РФ). Тогда говорим, что ряд Фурье функции f сходится в точке x.

Подставим равенства $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$ в формулу

$$S_k(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{k} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{k}\cos(n(t-x))\Big)\,dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin(\frac{1}{2}(2k+1)(t-x))}{2\sin(\frac{1}{2}(t-x))}dt$$

Пользуемся тут формулой

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{k}\cos(nu) = \frac{\sin(\frac{1}{2}(2k+1)u)}{2\sin(\frac{1}{2}u)}.$$

по-разному КОММЕНТИРОВАТЬ!
1) $2\sin\alpha\cos\beta = \sin\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$
2) $\sum\cos(nu) = \Re e\sum e^{inu}$ — прогрессия

Меняем местами интеграл с конечной суммой, получаем

$$S_k(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_k(t)dt, \qquad \text{где} \quad D_k(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(\frac{1}{2}(2k+1)t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}$$ — называется «*ядро Дирихле*».

Так как при всех k справедливо $\int_{-\pi}^{\pi} D_k(x)dx = 1$ (так как $\int_{-\pi}^{\pi} D_k(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx$), то

$$f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)D_k(t)dt, \qquad S_k(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t) - f(x)]D_k(t)dt.$$

Интеграл справа разбиваем на два интеграла: по $(-\delta, \delta)$ и по $[-\pi, -\delta] \bigcup [\delta, \pi]$. Интеграл по множеству $[-\pi, -\delta] \bigcup [\delta, \pi]$ в силу леммы Римана стремится к нулю. Малость интеграла

$$I_\delta^k = \int_{-\delta}^{\delta} [f(x+t) - f(x)] D_k(t) dt$$

при $k \to \infty$ определяет сходимость РФ в точке x. Доказан **принцип локализации:** *сходимость РФ интегрируемой функции в точке определяется лишь значениями функции в окрестности.*

Иначе: если значения двух интегрируемых функций в окрестности некоторой точки совпадают, то их ряды Фурье в этих точках сходятся или расходятся одновременно.

Сказать, что это не очевидный факт: коэффициенты РФ зависят от **всех** значений функции.

10. **Признаки сходимости рядов Фурье в точке.**

Признак Дини. *Если при некотором $\delta_0 > 0$ интеграл*

$$\int_{-\delta_0}^{\delta_0} \frac{|f(x+t) - f(x)|}{t} dt \tag{1}$$

*конечен (**условие Дини**), то в точке x ряд Фурье сходится.*

Например, если функция f удовлетворяет условию Липшица, или Гёльдера с некоторым $\alpha > 0$, то условие признака Дини выполнено. Если выполнено локально, то сходимость в точке, если при всех x, то поточечно везде. Про равномерную сходимость пообещать сказать позже.

Из условия Дини следует непрерывность функции в точке x.

Доказательство признака Дини. По условию Дини выбираем малое $\delta < \delta_0$, при котором интеграл (1) не превосходит ε. Это можно сделать по абсолютной непрерывности интеграла. Так как функции $tD_k(t)$ равномерно ограничены в окрестности 0, то величины I_δ^k маленькие равномерно по k. Теперь по лемме Римана интегралы по $[-\pi, -\delta] \bigcup [\delta, \pi]$ стремятся к 0 при $k \to \infty$. □

Признак Дини для кусочно разрывных функций. Пусть функция f имеет в точке x разрыв первого рода: определены величины $f(x \pm 0)$. Тогда, если конечны оба интеграла

$$\int_{-\delta}^{0} \frac{|f(x+t) - f(x-0)|}{t} dt, \qquad \int_{0}^{\delta} \frac{|f(x+t) - f(x+0)|}{t} dt.$$

то в точке x ряд Фурье сходится к величине $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$.

Это верно так как: $\displaystyle\int_{[-\pi,0]} D_k(x) dx = \int_{[0,\pi]} D_k(x) dx = 1/2$, и

$$S_k(x) - \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) = \int_{-\pi}^{0} \big(f(x+t) - f(x-0)\big) D_k(t) dt + \int_{0}^{\pi} \big(f(x+t) - f(x+0)\big) D_k(t) dt$$

и теперь снова надо использовать лемму Римана.

Например, все это выполнено, если функция f имеет односторонние конечные производные в точке разрыва. Или выполнено одностороннее условия Гёльдера ($|f(x+0)-f(x+t)|, |f(x-0)-f(x-t)| \leqslant Kt^{\alpha}$ $(t>0)$).

Существуют непрерывные функции, РФ которых в некоторых точках расходятся!

Пример в Колмогорове-Фомине в конце п.1, §1, глава 8. Я не буду его точно рассказывать, расскажу **схему**. Во-первых,

$$\int_{[-\pi,\pi]} |D_k(x)|dx \to \infty$$

Для доказательства этого факта возьмем при большом k точки x_n, где знаменатель ядра Дирихле равен 1, возьмем окрестности ширины $2\pi/(3(2n+1))$ вокруг каждой точки и оценим все, что нужно. При этом получается кусок гармонического ряда до $1/k$.

Поэтому нормы линейных функционалов в C с ядрами D_k не ограничены в совокупности.

В силу теорем о слабой сходимости функционалов последовательность этих функционалов не может быть слабо сходящейся. Значит, для некоторой функции f

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_k(t)dt$$

не существует (а это значение S_k в нулевой точке). **Конец схемы.**

11. **Признак Дирихле.** *Если интегрируемая функция f имеет ограниченную вариацию в некоторой окрестности точки x_0, то ряд Фурье сходится к $\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$.*

Дирихле доказал чуть более слабый факт: если функция f кусочно монотонна и имеет не более конечного числа разрывов первого рода, то ряд Фурье сходится к $\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$.

Признаки Дирихле и Дини не следуют один из другого. **Примеры:** $f(x) = \frac{1}{\ln|x|}, f(0) = 0$ (это обратная к $e^{-1/|x|}$) удовлетворяет Дирихле, но не удовлетворяет Дини:

$$\int_0^h \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^h \frac{dt}{t\ln t} = \infty$$

Функция $f(x) = x\cos(1/x)$ не имеет ограниченной вариации в окрестности нуля, но для неё верны условия признака Дини.

Доказательство признака Дирихле.

Лемма. Если функция g монотонная и ограниченная на $[0,h]$, $h>0$, то

$$\lim_{p\to\infty} \int_0^h g(t)\frac{\sin(pt)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}\,g(+0).$$

Доказательство леммы.

$$\int_0^h g(t)\frac{\sin(pt)}{t}\,dt = \int_0^h g(+0)\frac{\sin(pt)}{t}\,dt + \int_0^h (g(t)-g(+0))\frac{\sin(pt)}{t}\,dt.$$

Теперь
$$\int_0^h g(+0)\frac{\sin(pt)}{t}\,dt = g(+0)\int_0^{ph}\frac{\sin(t)}{t}\,dt \to g(+0)\int_0^{\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}\,g(+0).$$
Теперь оцениваем интеграл $\displaystyle\int_0^h (g(t)-g(+0))\frac{\sin(pt)}{t}\,dt$, покажем, что он стремится к нулю. Сначала $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta:>0\ \forall t\in(0,\delta)$ справедливо $0\leqslant g(t)-g(+0)<\varepsilon$. Теперь
$$\int_0^h (g(t)-g(+0))\frac{\sin(pt)}{t}\,dt = \left(\int_0^{\delta}+\int_{\delta}^{h}\right)$$
Интеграл по $[\delta,h]$ стремится к нулю по лемме Римана.

А к интегралу по $[0,\delta]$ применим формулу Бонне (вторую теорему о среднем): если $f\geqslant 0$ и не убывает, то при некотором ξ
$$\int_a^b f(x)q(x)\,dx = f(b)\int_a^{\xi} q(x)\,dx.$$
Отсюда при некотором $\xi\in(0,\delta)$
$$\int_0^{\delta}(g(t)-g(+0))\frac{\sin(pt)}{t}\,dt = (g(\delta)-g(+0))\int_{\xi}^{\delta}\frac{\sin(pt)}{t}\,dt = (g(\delta)-g(+0))\int_{p\xi}^{p\delta}\frac{\sin t}{t}\,dt.$$
Здесь $g(\delta)-g(+0)\in(0,\varepsilon)$, а множитель $\displaystyle\int_{p\xi}^{p\delta}\frac{\sin t}{t}\,dt$ равномерно ограничен (непрерывная функция $\displaystyle si(p)=\int_0^p\frac{\sin t}{t}\,dt$ на ∞ стремится к конечному пределу). Лемма доказана. □

Теперь пишем интеграл для S_n в симметричном виде (ядро Дирихле — чётная функция)
$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_k(t)dt = \int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]D_k(t)dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\frac{1}{2}t}{\sin(\frac{1}{2}t)}\,\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{t}\,dt.$$
Сумма в квадратных скобках — ограниченной вариации по t, следующий множитель — монотонный, их произведение имеет ограниченную вариацию, то есть является разностью монотонных функций, к каждой применима доказанная лемма и лемма Римана. Поэтому
$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\pi}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$$
□

Лекция 3 (13 апреля 2015)

На прошлой лекции, мы рассмотрели вопросы сходимости РФ. Сначала доказали принцип локализации и дали два признака сходимости РФ в фиксированной точке — Дини и Дирихле.

По дороге мы сформулировали и воспользовались двумя вспомогательными утверждениями: леммой Римана и непрерывностью в среднем.

Лемма Римана — это ..., непрерывность в среднем - сегодня возникнет ещё раз, я напомню.

Равномерная сходимость рядов Фурье. Самую простую теорему мы уже формулировали в терминах коэффициентов Фурье. Дадим ещё её аналоги в терминах функции.

Теорема. *Пусть функция f абсолютно непрерывна, а ее производная принадлежит L_2. Тогда РФ f сходится равномерно к f.*

Доказательство. Пусть a_n, b_n, A_n, B_n — коэффициенты рядов Фурье функций f и f'. Из неравенства Бесселя следует, что $\sum(A_n^2 + B_n^2) < \infty$. Интегрируем по частям:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}f(x)\frac{\sin(nx)}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(nx)dx = -\frac{B_n}{n};$$

аналогично, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{A_n}{n}$; (по частям можно, так как $f \in AC$ и справедлива формула Ньютона-Лейбница) следует, что $na_n = -B_n,\ nb_n = A_n$. Поэтому (так как $\frac{c}{n} \leqslant \frac{1}{2}(c^2+n^{-2})$)

$$\sum(|a_n| + |b_n|) = \sum\left(\frac{|A_n|}{n} + \frac{|B_n|}{n}\right) \leqslant \frac{1}{2}\sum\left(A_n^2 + B_n^2\right) + \sum n^{-2} < \infty,$$

и по признаку Вейерштрасса ряд Фурье f равномерно и абсолютно сходится. Пусть φ — сумма РФ. Она имеет те же коэффициенты Фурье, в силу непрерывности f и φ они совпадают. □

Справедлив аналог условия Дини равномерной сходимости. Если условие Дини выполняется равномерно, то есть

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \quad \text{справедливо} \qquad \int_{-\delta}^{\delta}\frac{|f(x+t) - f(x)|}{t}dt < \varepsilon,$$

то РФ сходится к f равномерно. Доказательство не привожу, надо передоказать лемму Римана с равномерностью, пользоваться компактностью в L_1.

Равномерно сходящиеся тригонометрические ряды. Ядра Фейера.

Пофилософствовать про суммирование расходящихся рядов. Что есть специальная теория, что важно для вычислительных методов, что один из методов — по Чезаре — как раз усреднением.

Пишем тригонометрический многочлен

$$\sigma_k(x) = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} S_n(x) = \frac{1}{k\pi}\sum_{n=1}^{k}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\left(\frac{1}{2}(2n+1)(t-x)\right)}{2\sin(\frac{1}{2}(t-x))}dt =$$

$$= \frac{1}{2k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{\sin(\frac{k}{2}(t-x))}{\sin(\frac{1}{2}(t-x))}\right)^2 dt = \frac{1}{2k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\left(\frac{\sin(\frac{k}{2}t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}\right)^2 dt,$$

то есть $\quad \sigma_k(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\Phi_k(t)dt, \quad$ где $\quad \Phi_k(t) = \dfrac{1}{2k\pi}\left(\dfrac{\sin(\frac{k}{2}t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}\right)^2$. Заметим, что максимум ядра Фейера Φ_k имеет порядок k^2, но есть множитель $1/k$. Поэтому не всё просто. Ядро Фейера «лучше» ядра Дирихле тем, что оно положительно и перед ним уже стоит множитель, стремящийся к нулю.

Теорема Фейера. $f \in C[-\pi,\pi],\ f(-\pi) = f(\pi) \ \Rightarrow\ \sigma_n \rightrightarrows f$.

Доказательство. Так как при $f \equiv 1$ и $S_k \equiv 1$, и $\sigma_k \equiv 1$, то $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_k(t)\,dt = 1$ при всех k. Поэтому

$$|\sigma_k(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+x) - f(x)| \left(\frac{\sin(\frac{k}{2}t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}\right)^2 dt.$$

Нам нужно сделать $|\sigma_k(x) - f(x)| < \varepsilon$. Выберем по равномерной непрерывности f число δ такое, что $\sup_{|x-y|\leqslant\delta}\{|f(x) - f(y)|\} \leqslant \varepsilon/2$. Разбиваем интеграл на 2: по $A = \{|t| \leq \delta\}$, и второй по оставшемуся множеству $B = [-\pi,\pi] \setminus A$. На множестве A интеграл при любом k не превосходит $\sup_{|x-y|\leqslant\delta}\{|f(x) - f(y)|\} \leqslant \varepsilon/2$ (после вынесения f оставшийся интеграл не превосходит 1). На множестве B знаменатель больше δ, поэтому там интеграл имеет порядок $\sup|f|(\pi\delta^2 k)^{-1}$ и при больших k тоже не превосходит $\varepsilon/2$. $\square$

Следствие 1. Теперь теоремы Вейерштрасса о том, что множества многочленов и тригонометрических многочленов плотны в пространстве C доказаны. $\square$

Напоминаю. *Ранее формулировались теоремы о том, что множества всех многочленов и всех тригонометрических многочленов плотны в $C(0,1)$ (каждое). Это тогда не было доказано, была сформулирована и не доказана теорема Бернштейна, из неё всё следовало.*

Теперь мы доказали, что в пространстве C_0 периодических непрерывных функций тригонометрические многочлены плотны. В качестве аппроксимаций тригонометрическими функциями берем суммы Фейера, для аппроксимаций многочленами сначала делаем функцию периодической с помощью линейной добавки, потом приближаем тригонометрическим многочленом Фейера. Потом конкретный тригонометрический многочлен приближаем куском степенного ряда.

Отсюда следует заодно и **полнота тригонометрической системы** в L_2. Теперь мы знаем, что каждую периодическую непрерывную функцию можно равномерно приблизить линейной комбинацией тригонометрических многочленов. Следовательно, можно в L_2 приблизить линейной комбинацией тригонометрических многочленов с рациональными коэффициентами, это счетное множество. А то, что каждую интегрируемую можно приблизить в L_2 непрерывной мы уже знаем, я об этом говорил много раз, можно через ступенчатые, можно через теорему Лузина.

Подчеркиваю! Суммы Фейера — это не ряды Фурье, это другие тригонометрические ряды. Ряды Фурье оптимально приближают функции в L_2 по норме L_2. Суммы Фейера отлично работают в C... и в L_1.

Теорема Фейера в L_1. *Если $f \in L_1$, то суммы Фейера сходятся к f по норме L_1.*

Доказательство.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_k(x) - f(x)|\, dx = \frac{1}{2k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \Big| \int_{-\pi}^{\pi} (f(t+x) - f(x)) \left(\frac{\sin(\frac{k}{2}t)}{\sin(\frac{1}{2}t))} \right)^2 dt \Big| \leqslant$$

$$\frac{1}{2k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+x) - f(x)| \left(\frac{\sin(\frac{k}{2}t)}{\sin(\frac{1}{2}t))} \right)^2 dt \right) =$$

$$\frac{1}{2k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+x) - f(x)|\, dx \right) \left(\frac{\sin(\frac{k}{2}t)}{\sin(\frac{1}{2}t))} \right)^2.$$

Интеграл по t справа при $|t| > t_0$ оценивается легко:

$$\frac{1}{2k\pi} \left(\frac{\sin(\frac{k}{2}t)}{\sin(\frac{1}{2}t))} \right)^2 \leqslant \frac{1}{2k\pi \sin^2(t_0/2)},$$

при больших k это малая величина. Осталось доказать, что при малых $|t|$ мала величина

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+x) - f(x)|\, dx.$$

Это как раз то, что называется непрерывностью в среднем и что я использовал при доказательстве обобщенной леммы Римана, вторично не буду доказывать. □

Дополнительное замечание 1. Всякая суммируемая функция определяется своими коэффициентами Фурье.

То есть, берем коэффициенты Фурье суммируемой функции, по ним однозначно восстанавливается функция: если f и g имеют одинаковые коэффициенты Фурье, то все коэффициенты Фурье $f - g$ равны нулю. По построению сумм Фейера $f - g$ они тоже все равны нулю, значит предел в L_1 равен нулю, то есть $f \overset{a.e.}{=} g$.

Дополнительное замечание 2. Пусть функция f в точке x имеет конечные правые и левые конечные пределы $f(x-0)$ и $f(x+0)$. Тогда $\sigma_n \to \frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0))$. Доказательство то же.

Ряды Фурье на $[-\ell, \ell]$. Не буду доказывать теоремы про это. Только формулы напишу. Ортонормированная система и ряд Фурье имеют вид:

$$\frac{1}{\sqrt{2\ell}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\ell}} \cos(\frac{\pi n t}{\ell}), \quad \frac{1}{\sqrt{\ell}} \sin(\frac{\pi n t}{\ell}); \qquad f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{\pi n t}{\ell}) + b_n \sin(\frac{\pi n t}{\ell}).$$

Формулы для коэффициентов Фурье: $a_n = \dfrac{1}{\ell} \displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos(\frac{\ell n x}{\pi}) dx, \quad b_n = \dfrac{1}{\ell} \displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin(\frac{\ell n x}{\pi}) dx.$

Ряд Фурье непериодической функции — особенность по краям. Сказать, что об этом надо помнить, но что это в точности соответствует любому другому скачку.

Ряд Фурье по другому отрезку длины 2π. Часто РФ пишут на промежутке $[0, 2\pi]$, это абсолютно то же самое.

Разложение отдельно по синусам и по косинусам. Если функция четная, то она раскладывается по косинусам, если нечетная — по синусам.

Особая конструкция — если функция задана на полупериоде, например, на $[0, \pi]$, то её можно разложить в РФ на отрезке $[-\pi, \pi]$ и по синусам, и по косинусам: надо только по-разному продлить.

Продлеваем чётным образом, раскладываем в РФ, получаются только косинусы. Продлеваем нечётным образом, раскладываем в РФ, получаются только синусы.

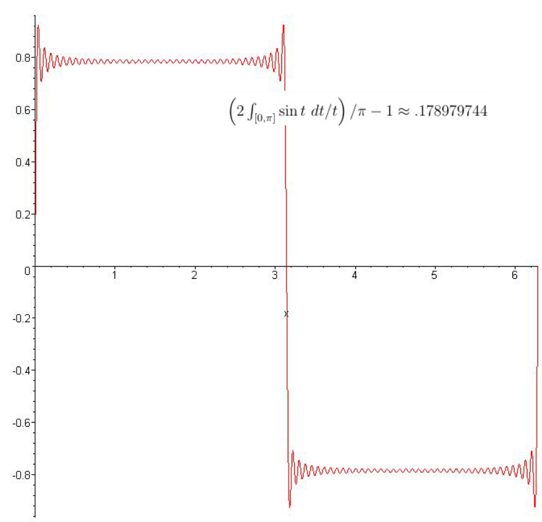
Другие виды записи ряда Фурье. Например, можно считать, что $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r_n \cos(nt + \varphi_n)$, это что-то вроде РФ в полярных координатах. В каждом двумерном подпространстве в L^2 с базисом из $\cos(nt), \sin(nt)$ можно функции писать в виде $\cos(nt + \varphi)$.

Можно ещё представлять все это так. Пусть на комплексной плоскости задана единичная окружность $z = e^{it}$, параметр $t \in [-\pi, \pi]$. Пусть есть функция комплексного переменного, $f(z)$, задана на окружности и ещё где-то в окрестности. И пусть функция разложена в ряд Лорана в нуле $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k z^k$. Тогда на окружности это получится

$$\varphi(t) = f(e^{it}) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt},$$

то есть типичный ряд Фурье. Если $c_k = \overline{c_{-k}}$, то получится вещественный ряд.

Эффект Гибса. Словесно рассказать, что это такое, нарисовать картинку. Подчеркнуть, что эффект Гиббса — это именно свойство РФ для кусочно непрерывных функций!



Лекция 4 (20 апреля 2015)

На прошлой лекции, изучалась сходимость тригонометрических рядов к непрерывной периодической функции. Доказали равномерную сходимость сумм Фейера, это позволило, наконец, с одной стороны, честно доказать теорему Вейерштрасса, а с другой — доказать полноту тригонометрической системы: при доказательстве сходимости тригонометрических многочленов Фейера не использовалось ничего, как и при доказательстве теоремы Берштейна.

Кроме того, я рассказал несколько разных конструкций, например, что такое эффект Гибса.

На этой лекции мы завершим ряды Фурье и перейдем к интегралам Фурье.

Начну я с вопроса: а всякий ли тригонометрический ряд является РФ от некоторой интегрируемой функции? Вдумайтесь, вот есть ряд. Коэффициенты стремятся к нулю. Если квадраты коэффициентов суммируемые — по абстрактной теореме Рисса–Фишера это РФ функции из L_2. Ещё какие-то ряды являются рядами Фурье функций из $L_1 \setminus L_2$. А что-нибудь останется? Или всякий тригонометрический ряд со сходящимися к нулю коэффициентами сходится к интегрируемой функции?

Заметим, что если функция не принадлежит L_1, то что такое ряд Фурье для неё — отдельный вопрос: коэффициенты Фурье могут быть не определены.

Сходящиеся тригонометрические ряды, не являющиеся рядами Фурье никакой интегрируемой функции. Итак, есть тригонометрический ряд. Он не появился в качестве РФ от какой-то функции... в частности, его коэффициенты убывают к нулю не слишком быстро, поэтому в первую очередь хорошо бы быть уверенными, что этот ряд сходится... или почти всюду сходится... Когда у нас знакопеременные ряды сходятся? Правильно, когда они удовлетворяют признакам Абеля или Дирихле.

Здесь есть специальная теория для РФ с положительными убывающими коэффициентами (Юнг). Рассмотрим ряды

$$(S) \qquad \sum q_n \sin(nt), \qquad\qquad (C) \qquad \sum q_n \cos(nt).$$

Пусть $0 \leqslant \ldots \leqslant q_{n+1} \leqslant q_n \ldots \leqslant \ldots q_1$. По признаку Дирихле[1] оба эти ряда сходятся всюду к некоторой функции. Более того, в силу признака Дирихле равномерной сходимости[2] ряды (S) и (C) сходятся равномерно на любом замкнутом промежутке, не содержащем точки $2k\pi$. Для того, чтобы это увидеть, надо рассмотреть суммы

$$\Big|\sum_1^n \sin(nt)\Big| = \Big|\frac{\cos(\frac{1}{2}x) - \cos((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{1}{2}x)}\Big| \le \frac{1}{|\sin(\frac{1}{2}x)|},$$

они равномерно ограничены на любом замкнутом промежутке, не содержащем точки $2k\pi$.

[1] Признак Дирихле условной сходимости ряда. Ряд $\sum a_n b_n$, $a_n \searrow 0$, $|\sum_1^k b_n| < K < \infty \Rightarrow$ ряд сходится.

[2] Признак Дирихле равномерной сходимости: $\sum f_n(x) g_n(x)$, $f, g \in C$, $f_n(x) \searrow\searrow 0$, $|\sum_1^k g_n(x)| < K < \infty$.

Вопрос о принадлежности суммы к L_1 заключается в изучении поведения суммы ряда в окрестности 0.

Теорема. *Если* $\sum q_n/n < \infty$*, то оба ряда* (C)*,* (S) *сходятся к интегрируемым функциям. Если ряд* (S) *сходится к интегрируемой функции, то* $\sum q_n/n < \infty$*.*

Для доказательства первой части теоремы следует всё аккуратно расписать и оценить.

Для доказательства второй части надо взять ряд (S) и его проинтегрировать от 0 до t:

$$\int_0^t f(x)\,dx = \sum_1^\infty \frac{q_n}{n}(1-\cos(nt)) = \sum_1^\infty \frac{q_n}{n} - \sum_1^\infty \frac{q_n}{n}\cos(nt).$$

Теперь слева получается конечная величина, справа разность $\sum q_n/n$ и сходящегося ряда. $\square$

Из этого всего следует, что тригонометрический ряд $\sum^\infty \sin(nx)/\ln n$ не является РФ никакой интегрируемой функции.

Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Когда можно дифференцировать РФ? Брать первообразную? Если была функция, и мы взяли её производную или первообразную, то что будет с их РФ? Со сходимостью?

Основное соображение простое: при интегрировании повышается гладкость и «улучшается» сходимость РФ, при дифференцировании сходимость РФ «ухудшается». Одно дифференцирование — коэффициенты РФ умножаются на n, одно интегрирование — делятся на n.

Одна теорема была — если $f \in AC$ и $f' \in L_2$, то РФ функции f сходится равномерно. При её доказательстве была установлена связь коэффициентов РФ функции и её производной. С помощью интегрировании по частям было показано: если a_n, b_n, A_n, B_n — коэффициенты рядов Фурье функций f и f', то $na_n = -B_n$, $nb_n = A_n$.

Аналогично, обозначим через $a_n^{(k)}, b_n^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$ коэффициенты ряда Фурье функции $f^{(k)}$ (если она существует и интегрируема). Например, если $f^{(k-1)} \in AC$ и $f^{(k)} \in L_2$. Тогда

$$\text{при } k = 2m: \; n^k a_n = (-1)^m a_n^k,\; n^k b_n = (-1)^m b_n^k, \quad \text{при } k = 2m-1: \; n^k a_n = (-1)^m b_n^k,\; n^k b_n = (-1)^m a_n^k.$$

Поэтому, если $f^{(k-1)} \in AC$ и $f^{(k)} \in L_2$, то сходится ряд $\sum n^k(|a_k| + |b_k|)$ и ряд Фурье можно дифференцировать k раз.

Обычно все теоремы о дифференцировании и интегрировании основаны на простых формулах для соответствующих коэффициентов Фурье, получающихся при формальном почленном интегрировании или дифференцировании. Логика простая: если у функции есть достаточно количество производных, то её коэффициенты сходятся к нулю достаточно быстро, чтобы можно было почленно дифференцировать.

Интегрировать можно всегда, при интегрировании важно простое соображение: коэффициент a_0 должен быть равен 0, чтобы первообразная осталась периодической, из первообразных надо брать ту, с нулевой константой, если мы хотим зачем-то потом интегрировать ещё раз.

Пример теоремы. *Пусть $f \in L_2$, тогда первообразная F, $F' = f$ получается почленным интегрированием и полученный ряд сходится равномерно.*

Теорема следует из предыдущей теоремы, переписанной для F: если $f \in L_2$, то $F \in AC$.

Теоремы о интегрировании РФ на произвольном промежутке $[a, b]$ не рассматриваются, нет специальных утверждений, обычный функциональный ряд.

Скорость сходимости рядов Фурье.

Основное соображение: чем глаже функция, тем быстрее сходится к ней РФ. Например, если коэффициенты убывают, как n^{-3}, то РФ, очевидно, сходится равномерно и $\|S_n(x) - f(x)\|_C$ можно оценить как $C_1 \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-3} \leqslant C_2 n^{-2}$. Можно получить и оценки в терминах функции

Например, если $f \in C$ и кусочно $f \in C^1$, то $\|S_n(x) - f(x)\|_C \leqslant K \ln n\, n^{-1}$.

Для доказательства надо выписать разность $S_n(x) - f(x)$ через ядро Дирихле, потом разбить промежуток интегрирования $[-\pi, \pi]$ на $[-n^{-1}, n^{-1}]$ и остальное и аккуратно провести все оценки, на маленьком промежутке оценить через его длину и максимум производной, на большом проинтегрировать по частям.

Соответственно, можно выписывать оценки в C^m. Если функция 2 раза непрерывно дифференцируема, то $\|S_n(x) - f(x)\|_{C^1} \leqslant K \ln n\, n^{-2}$. Условие Гёльдера тоже можно использовать. Если f удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha \in (0, 1]$, то $\|S_n(x) - f(x)\|_C \leqslant K \ln n\, n^{-\alpha}$.

Ещё факты без доказательства, привожу с целью создать правильное впечатление о местной проблематике. Доказательства можно самим придумывать, можно найти, утверждения весьма естественные.

Лемма Кантора. *Если тригонометрический ряд сходится на некотором промежутке, то коэффициенты ряда стремятся к нулю.*

Не ряд Фурье, абстрактный. Сходимости на плотном множестве - недостаточно!

Теорема Гейне-Кантора. *Если тригонометрический ряд сходится к нулю на $[-\pi, \pi]$, то все его коэффициенты нулевые.*

Заметим, что сходимость к нулю на меньшем промежутке вовсе не гарантирует равенства нулю всех коэффициентов тригонометрического ряда. В самом деле, берем функцию, на маленьком промежутке тождественный 0, а вне - что угодно. Берем ряд Фурье.

Теорема дю Буа-Раймона. *Если f ограничена, интегрируема и разлагается поточечно в тригонометрический ряд, то ряд этот является её рядом Фурье.*

Доказательства есть в Фихтенгольце (том 3), слишком громоздкие-сложные :)

Интеграл Фурье и преобразование Фурье.

При изучении РФ мы предполагали, что функция периодическая, в основном на промежутке $(-\pi, \pi)$. Теперь предположим, что функция определена на $\mathbb{R}$ и интегрируема (если мы хотим говорить об интеграле Римана, то абсолютно интегрируема, для интеграла Лебега это одно и то же). Оказывается, что при этом можно написать похожую формулу, заменив целочисленную положительную переменную n на положительную вещественную y, и сумму на интеграл:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \quad \text{заменить на} \quad \int_0^{\infty} \Big(a(y)\cos(xy) + b(y)\sin(xy)\Big)\, dy.$$

При этом

$$a(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(ty)\, dx, \qquad b(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(ty)\, dx.$$

Оба этих интеграла сходятся по мажорантному признаку. Более того, так как по y подинтегральное выражение непрерывно — это просто синус-косинус — и всё мажорируется интегрируемой функцией $|f|$, то функции a и b непрерывные (легко проверить «в лоб»). Если подставить формулы для $a(y)$ и $b(y)$ в формулу (её называют интегралом Фурье), то получится выражение

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\big(y(t-x)\big)\, dt.$$

РФ представляет исходную функцию, и интеграл Фурье тоже: опять при выполнении дополнительный условий верна (при каком-то x или всюду) *формула Фурье* (ФФ):

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\big(y(t-x)\big)\, dt.$$

Если функция f чётная, то формула имеет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos(xy)\, dy \int_0^{\infty} f(t)\cos(ty)\big)\, dt,$$

если функция f нечётная, то формула имеет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \sin(xy)\, dy \int_0^{\infty} f(t)\sin(ty)\big)\, dt.$$

Операторы

$$F_c:\ f(x) \mapsto \hat{f}_c(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos(\xi x)\, dx, \qquad F_s:\ f(x) \mapsto \hat{f}_c(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\sin(\xi x)\, dx$$

называются косинус– и синус– преобразованием Фурье. Получили для четной функции $F_c \circ F_c = Id$, для нечетной функции $F_s \circ F_s = Id$.

Теорема. *Если функция f удовлетворяет условию Дини в точке x, то справедлива ФФ.*

Для справедливости условия Дини (интеграл

$$\int_{-\delta_0}^{\delta_0} \frac{|f(x+t) - f(x)|}{t}\, dt$$

сходится) необходима непрерывность f в точке x. Если f разрывна в x, существуют односторонние пределы и справедливы односторонние условия Дини (такие же, как для рядов Фурье), то

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dy \int_{-\infty}^\infty f(t)\cos\big(y(t-x)\big)\,dt.$$

Видимо, при естественных условиях можно доказать теоремы о равномерной сходимости ИФ на различных промежутках. Нужно предположить, что условие Дини справедливо в равномерной форме (как и при рядах Фурье) на соответствующем промежутке.

Доказательство теоремы. Рассмотрим аналог «частичной суммы» ряда:

$$J(A) = \frac{1}{\pi}\int_0^A dy \int_{-\infty}^\infty f(t)\cos\big(y(t-x)\big)\,dt.$$

Для доказательства теоремы надо показать, что $J(A) \to f(x)$ при $A \to \infty$.

Так как внутренний интеграл сходится равномерно при всех y, то можно поменять интегралы местами. Получаем (на последнем шаге делаем замену $z = t - x$)

$$J(A) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\,dt \int_0^A \cos\big(y(t-x)\big)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\,\frac{\sin\big(A(t-x)\big)}{t-x}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x+z)\,\frac{\sin(Az)}{z}\,dz.$$

Воспользуемся равенством (которое верно при $A > 0$):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(Az)}{z}\,dz = 1. \qquad \text{Теперь} \qquad J(A) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{f(x+z)-f(x)}{z}\,\sin(Az)\,dz.$$

Интеграл в формуле для $J(A) - f(x)$ разобьем на 5 частей (величины $\delta, N > 0$ выберем позднее):

$$\int_{-\infty}^\infty \ldots = \int_{-\infty}^N \ldots + \int_{-N}^{-\delta} \ldots + \int_{-\delta}^\delta \ldots + \int_\delta^N \ldots + \int_N^\infty \ldots.$$

Части 1 и 5 легко оценить величинами $\frac{2}{\pi N}\|f\|_{L_1}$:

$$\int_N^\infty \Big|\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\,\sin(Az)\Big|\,dz \leqslant \frac{1}{N}\int_N^\infty |f(x+z)-f(x)|\,dz,$$

выбором N их можно сделать по модулю меньше ε, после чего N зафиксируем. Часть 3 можно сделать сколь угодно малой выбором $\delta > 0$ в силу условия Дини, сделаем её меньше ε и зафиксируем δ. А теперь можно куски 2 и 4 (при фиксированных N и δ) сделать сколь угодно малыми в силу леммы Римана при $A \to \infty$. □

Из доказательства видно, что для равномерной сходимости нужно равномерное условие Дини и нужно передоказать лемму Римана.

Признак Дирихле. *Пусть функция $f(x) \in L_1$ имеет в окрестности точки x ограниченную вариацию, тогда интеграл Фурье сходится в точке x к величине $S_0 = \frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$.*

Это утверждение аналогично признаку Дирихле для РФ, доказательство не буду приводить.

Комплексная форма записи равенства Фурье.

Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$, перепишем формулу Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dy \int_{-\infty}^\infty f(t)\cos\big(y(t-x)\big)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty dy \int_{-\infty}^\infty f(t)\cos\big(y(t-x)\big)\,dt$$

Рассмотрим величину:

$$\int_{-\infty}^\infty dy \int_{-\infty}^\infty f(t)\sin\big(y(t-x)\big)\,dt.$$

Вроде бы можно сказать, что функция по y нечетная, значит эта величина равна нулю, однако есть проблемы. Интеграл

$$\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin\big(y(t-x)\big)\,dt$$

сходится равномерно, является непрерывной функцией переменной y. Поэтому для любого N определен и равен нулю в силу нечетности интеграл Римана

$$\int_{-N}^N dy \int_{-\infty}^\infty f(t)\sin\big(y(t-x)\big)\,dt = 0.$$

Поэтому всегда

$$V.p. \int_{-\infty}^\infty dy \int_{-\infty}^\infty f(t)\sin\big(y(t-x)\big)\,dt = 0,$$

а без главного значения этот интеграл может расходиться. Теперь мы получили

$$f(x) = V.p.\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty dy \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-y(t-x)i}\,dt.$$

Главное значение в этой формуле часто опускают, формально оно необходимо.

Обратить внимание: чем интеграл с синусом отличается от интеграла с косинусом? Почему с косинусом всегда сходится, если $f \in L_1(\mathbb{R})$, а с синусом может расходится? Отвечу чисто технически. Дело в том, что в формуле для $J(A)$ возникает интеграл Дирихле $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$, если рассмотреть интеграл с синусом, то получится расходящийся интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx$, который сходится только в смысле главного значения.

Интеграл Фурье в литературе. Во многих (некоторых) учебниках излагают ИФ (и РФ) без интеграла Лебега. Поэтому в теоремах о сходимости вместо условия интегрируемости f на $\mathbb{R}$ пишут что-то вроде «f кусочно-непрерывна на каждом конечном интервале и абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$». Ну а мы знаем интеграл Лебега и можем писать всё честно!

Преобразование Фурье. Положим

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-iyt}\,dt, \qquad \text{тогда} \qquad f(x) = V.p.\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \hat{f}(t)e^{ixy}\,dt.$$

Определение. *Говорят, что $\hat{f}$ — это Фурье образ функции f, а отображение $f \mapsto \hat{f}$ — преобразование Фурье функции f. Соответственно, следующая формула $f = V.p.\ ...(\hat{f})$ — это обратное преобразование.*

Преобразование Фурье является математической основой, многих физико-математических дисциплин. Обработка сигнала, например. При этом говорят, что функция от переменной t — это сигнал, он меняется во времени. А его преобразование Фурье — это его представление в частотной области.

Представлять себе мои слова можно так: сигнал является суммой гармоник (синусоид) разных частот. В рядах Фурье эти частоты были просто кратны ведущей частоте. Для произвольного сигнала, особенно зашумленного, эти частоты произвольные. Преобразование Фурье в частотной области описывает амплитуды этих частот.

При этом различные компоненты формул, которые я буду писать, и о которых я буду говорить в чисто математических терминах, имеют явный физический смысл, например, энергия — это квадрат нормы сигнала в L_2.

Пишут не всегда так, как я написал. Иногда пишут прямое преобразование с коэффициентом 1, а обратное — с коэффициентом $\frac{1}{2\pi}$. Иногда и в преобразовании Фурье ставят главное значение.

Лекция 5 (27 апреля 2015)

На прошлой лекции я завершил ряды Фурье. Привёл пример тригонометрического ряда, который не является РФ никакой интегрируемой функции $\sum \sin(nt)/\ln n$.

Я обсудил вопросы связанные со скоростью сходимости РФ, дифференцирование и интегрирование РФ. При этом я никаких теорем с доказательством не формулировал, кроме очевидных. А основным было такое соображение: чем глаже функция, тем «лучше» (быстрее) сходится её РФ и наоборот. Соответственно, чем быстрее убывают к нулю коэффициенты РФ, тем глаже функция и тем лучше-быстрее сходится РФ. И вот это общее знание-впечатление является основным.

Далее рассказал про интеграл Фурье и про формулу Фурье. Формула Фурье справедлива при условии дополнительных условий. Я приводил признак Дини ($f \in L_1(\mathbb{R})+$ условие Дини).

Теперь я начну-продолжу изучение преобразования Фурье, его свойств.

Замечание 1. Обсудить, какой интеграл брать в формулах — Лебега или Римана? Мы будем предполагать, что $f \in L_1(\mathbb{R})$ (внутренний интеграл — Лебега!), поэтому подынтегральная функция во внешнем интеграле непрерывна. Отсюда следует, что внешний интеграл надо брать Римана, для него определено главное значение.

Замечание 2. Для каждой периодической $f \in L_1$ можно посчитать коэффициенты РФ. Для сходимости РФ нужны дополнительные условия. Так и тут: для $f \in L_1(\mathbb{R})$ определено его преобразование Фурье. При дополнительных условиях (Дини) справедлива формула обращения, аналогичная сходимости РФ.

Замечание 3. Если $\hat{f} \equiv 0$, то и $f \overset{a.e.}{=} 0$. Это не очень удивительно, иначе какая-то функция переходит в 0, обратное преобразование Фурье в 0, и всяко формула Фурье не работает. Но это справедливо при всех $f \in L_1$, не только для тех, для которых справедлива ФФ. Покажем это.

3.1. $\hat{f} \equiv 0 \Rightarrow \forall y \in \mathbb{R}$ справедливо $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iyt}\,dt = 0$, поэтому $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iy(t-x)}\,dt = e^{iyx}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iyt}\,dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)e^{-iyt}\,dt = 0.$$

3.2. Зафиксируем $a < b \in \mathbb{R}$ и положим $g(x; a, b) = g(x) = \displaystyle\int_{[a,b]} f(x+t)dt$.

3.3. Ясно, что $\|g\|_{L_1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{[a,b]} f(x+t)dt \right| dx \leqslant \int_{[a,b]} \|f\|_{L_1(\mathbb{R})} dx = |b-a|\, \|f\|_{L_1(\mathbb{R})}$ и $g(x) \in L_1(\mathbb{R})$.

3.4. В силу теоремы Фуббини и пункта 3.1 $\forall y \in \mathbb{R}$ справедливо

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-iyx}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{[a,b]} f(x+t)dt\right) e^{-iyx}\,dx = \int_{[a,b]} dt \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)e^{-iyx}\,dx\right) = 0.$$

3.5. Функция $g \in AC$ на любом конечном промежутке, g' существует почти всюду. Следовательно, почти всюду справедливо условие Дини, следовательно для g справедлива почти всюду формула Фурье, g непрерывна, $\hat{g} = 0$, значит $g \equiv 0$.

3.6. Теперь $\forall \xi \in \mathbb{R}$ справедливо $\displaystyle\int_0^\xi f(t)dt = 0$, значит $f \overset{a.e.}{=} 0$. $\square$

Свойства преобразования Фурье. Фурье-образ функции f обозначаем либо $\hat{f}$, либо $F[f]$.

1. Если $f_n \in L_1(\mathbb{R})$ и $\|f_n - f\|_{L_1(\mathbb{R})} \to 0$, то $\hat{f}_n \rightrightarrows \hat{f}$. Сходимость Фурье образов равномерна на всей прямой. Свойство следует из всяческой полноты и очевидной оценки

$$|\hat{f}_n(y) - \hat{f}_m(y)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f_m(x)|\, dx$$

Этот простой факт требует пояснений. Мы берем последовательность функций, сходящуюся в среднем, к ней применяем Фурье, получаем равномерную сходимость, мы же знаем, что равномерная сходимость — это ещё лучше, потом применяем обратное преобразование Фурье, должны получить вообще суперсходимость... То есть, если функции гладенькие, условие Дини выполнено, то мы «бесплатно» получили улучшение сходимости. Так, конечно, не бывает. Просто равномерная сходимость на бесконечном промежутке — вовсе не гарантирует сходимости в L_1.

2. Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то $\hat{f} \in C(\mathbb{R})$ и $\hat{f}(y) \to 0$ на бесконечности. В частности, $\hat{f}$ — ограниченная функция, $\|\hat{f}\|_C \leqslant \|f\|_{L_1}$.

Ограниченность и оценка для $\hat{f}$ очевидна: $|\hat{f}(y)| \leqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$.

Если $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$, то $\hat{f} = \displaystyle\int_a^b e^{-ixy}\, dx = y^{-1}(e^{iyb} - e^{iya})$, это непрерывная функция, стремится к 0 на бесконечности. Следовательно, преобразование Фурье любой линейной комбинации характеристических функций отрезков такое же. Такие ступенчатые функции плотны в $L_1(\mathbb{R})$, поэтому для любой $f \in L_1(\mathbb{R})$ найдется последовательность линейных комбинаций $f_n \to f$ в $L_1(\mathbb{R})$.

Теперь свойство 2 следует из свойства 1.

Более того, $\hat{f}$ равномерно непрерывная на $\mathbb{R}$. Это можно доказать «в лоб», оценив величину $|\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\eta)|$. Воспользуемся соотношениями

$$e^{-i\xi x} - e^{i\eta x} = -2ie^{-i(\xi+\eta)x/2} \sin\Big(\frac{(\xi-\eta)x}{2}\Big)$$

и получим

$$|\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\eta)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big|\int_{\mathbb{R}} (e^{-i\xi x} - e^{i\eta x}) f(x)\, dx\Big| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \Big|\sin\Big(\frac{(\xi-\eta)x}{2}\Big) f(x)\Big|\, dx.$$

Теперь выбираем $\varepsilon > 0$, разбиваем $\mathbb{R}$ на 2 части: $|x| > K$ и $|x| \leqslant K$, первый интеграл делаем меньше $\varepsilon/2$, выбирая большое K, это хвосты сходящегося интеграла, $\int_{\mathbb{R}} |f|\, dx$, не зависящего от ξ, η. А второй интеграл сделаем меньше $\varepsilon/2$, выбирая маленькое $|\xi - \eta|$.

Осталось доказать стремление к нулю $\hat{f}$ на ∞. Для этого надо написать определение $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iyt}\, dt$, разбить интеграл на 2 такие же части, там где $|x|$ большой, там интеграл маленький, это хвосты сходящегося интеграла, а на ограниченном промежутке нужно применить лемму Римана. $\square$

3. Если $f \in AC$ на каждом конечном интервале и $f, f' \in L_1(\mathbb{R})$, то $\hat{f}F[f'] = iy\hat{f}$. Каждая $f \in AC$ имеет вид $f(0) + \int_{[0,x]} f'(t)dt$ (при $x > 0$) и вид $f(0) - \int_{[x,0]} f'(t)dt$ (при $x < 0$). В силу $f' \in L_1(\mathbb{R})$ существуют пределы $f(\pm\infty)$ на бесконечности ($f(A) - f(B) = \int_{[A,B]} f'(x)\,dx$ и далее, по Коши). В силу $f \in L_1(\mathbb{R})$ эти пределы равны нулю. Теперь

$$F[f'](y) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ixy}\,dx = f(x)e^{-ixy}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + iy\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx = iy\hat{f}(y).$$

Замечание. Объяснить похожую формулу из рядов Фурье. Коэффициенты a_n, b_n РФ функции f и коэффициенты $nb_n, -na_n$ РФ функции f' связаны таким же соотношением: умножить на n и повернуть на $90°$.

Следствие. *Аналогично, если $f^{(k-1)} \in AC$ на каждом конечном интервале и $f, \dots, f^{(k)} \in L_1(\mathbb{R})$, то $F[f^{(k)}] = (iy)^k F[f]$. То есть, (свойство 2) при такой гладкости $\hat{f}(y)$ убывает на бесконечности быстрее $|y|^{-k}$.*

4. Если $\exists\ f'' \in L_1(\mathbb{R})$ и $f, f' \in L_1(\mathbb{R})$, то $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$. Это следует из предыдущего пункта: $\hat{f}(y)$ убывает на бесконечности быстрее $|y|^{-2}$, следовательно, $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$.

5. Двойственное утверждение: пусть $f(x), xf(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда $\exists \frac{d}{dt}\hat{f} = F[-ixf(x)]$.

Доказывается в лоб, простым дифференцированием интеграла.

Аналогично, если $f(x), xf(x), \dots, x^p f(x) \in L_1(\mathbb{R})$, то $\exists \frac{d^k}{dt^k}\hat{f} = F[(-ix)^k f(x)],\ k = 0, \dots, p$.

Описаны производные от преобразования Фурье и преобразование Фурье от производных.

Философия. *В рядах Фурье гладкость функции определяла скорость сходимости коэффициентов к нулю и наоборот. Точно так же и здесь: гладкость функции связана со скоростью убывания Фурье-образа к нулю на бесконечности.*

Естественный **вопрос**: *какие классы функций преобразуются преобразованием Фурье в себя?*

Рассмотрим множество S_∞ бесконечно дифференцируемых функций f, таких что,

$$\forall n, k \in \mathbb{N}^+\ \exists C_{n,k} = C_{n,k}(f, n, k)\ \forall x \in \mathbb{R}\ \text{ справедливо }\ |x^n f^{(k)}(x)| \leqslant C_{n,k}.$$

Всё равно, считать ли целым n или вещественным. Называется пространство Шварца, в честь Лорана Шварца (1915-2002). Типичные примеры функций из S_∞: любая финитная гладкая функция, $P(x)e^{-x^2}$, где функция P может быть многочленом, или иметь экспоненциальный рост e^{ax}.

Естественно, $S_\infty \subset L_p$ при каждом $p \geqslant 1$.

Утверждение. *Преобразование Фурье преобразует S_∞ на всё S_∞.*

Для доказательства импликации $f \in S_\infty \Rightarrow F[f] \in S_\infty$ надо сослаться на отмеченные свойства преобразования Фурье. Доказательство того, что преобразование Фурье сюръективно, пройдёт заменой знака в показателе степени в силу Формулы Фурье.

Свертка функций. Пусть $f_1, f_2 \in L_1(\mathbb{R})$. Функция

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi)\, d\xi$$

называется свёрткой функций f_1 и f_2, обозначается $f = f_1 * f_2$. Свёртка интегрируемых функций интегрируема: по теореме Фуббини, так как существует интеграл $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} |f_1(\xi) f_2(\eta)|\, d\xi d\eta$, то существуют интегралы

$$\int_{\mathbb{R}} d\xi \int_{\mathbb{R}} |f_1(\xi) f_2(\eta)|\, d\eta = \int_{\mathbb{R}} d\xi\, |f_1(\xi)| \int_{\mathbb{R}} |f_2(\eta)|\, d\eta = \int_{\mathbb{R}} d\xi\, |f_1(\xi)| \Big(\int_{\mathbb{R}} |f_2(\eta - \xi)|\, d\eta \Big) = \int_{\mathbb{R}^2} |f_1(\xi) f_2(\eta - \xi)|\, d\eta\, d\xi$$

Часто пишут свёртку без множителя $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, он нужен, чтобы равенство $F[f_1 * f_2] = F[f_1]\, F[f_2]$ было без множителя. Свёртка коммутативна, свёртка ассоциативна.

Теорема. *Справедливо равенство* $F[f_1 * f_2] = F[f_1]\, F[f_2]$.

Доказывается так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big(f_1 * f_2\big)(x) e^{-ixy} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) d\xi \right] e^{-iyx} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-\xi)\, e^{-iyx} dx \right] d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta)\, e^{-iy\eta}\, e^{-iy\xi} d\eta \right] d\xi = F[f_1](y)\, F[f_2](y).$$

Преобразование Фурье в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

При изучении периодических функций и РФ у нас была сравнительно простая L_2-теория. На $\mathbb{R}$ тоже есть своя Фурье L_2-теория — интегралы Фурье. Есть принципиальная проблема-трудность: на ограниченном промежутке $L_2 \subset L_1$, а на $\mathbb{R}$ это не так. И поэтому преобразование Фурье на $L_2(\mathbb{R})$ мы не определили.

Вообще, $L_2(\mathbb{R}) \not\supset L_1(\mathbb{R})$, $L_1(\mathbb{R}) \not\supset L_2(\mathbb{R})$. Особенности на бесконечности и особенности в окрестности точки «работают» в разную сторону.

Для рядов Фурье всё было наоборот: сначала мы построили L_2-теорию, там вообще многие результаты определялись из абстрактной теории, справедливой в любом гильбертовом пространстве. А потом мы изучали отдельно ряды от интегрируемых функций, не принадлежащих L_2.

Определим при каждом $N > 0$ функцию

$$g_N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} f(x) e^{-iyx} dx.$$

На конечном промежутке $[-N, N]$ каждая функция $f \in L_2$ интегрируемая.

Теорема Планшереля (1910). *Пусть* $f \in L_2(\mathbb{R})$. *Тогда*

а) $g_N \in L_2(\mathbb{R})$;

б) g_N *сходится по норме* $L_2(\mathbb{R})$ *при* $N \to \infty$ *к некоторой* $g \in L_2(\mathbb{R})$;

в) справедливо равенство $\|g\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}$;

г) если $f \in L_1(\mathbb{R})$, *то* $g = \hat{f}$.

Предельную функцию g называют преобразованием Фурье $f \in L_2$. Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то $g = \hat{f}$.

Равенство Планшереля $\|g\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}$ — изометричность (унитарность) преобразования Фурье в L_2. Это естественный аналог равенства Парсеваля в теории РФ.

Кажется, что разница между L_2 и L_1 не настолько уж велика, чтобы специально исследовать случай L_2. Однако, это «кажется» неадекватно. Только в L_2 есть скалярное произведение, можно мерить углы ... поэтому продолжение ПФ на L_2 — важный момент.

Основная идея доказательства: сначала утверждение теоремы доказывается для функций из S_∞, они плотны в $L_2(\mathbb{R})$, далее распространяем всё по непрерывности.

Пусть функции $f, g \in S_\infty$, определим $\hat{f}, \hat{g} \in S_\infty$ — их Фурье–образы. Имеем

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda\Big)\overline{g(x)}\,dx =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \Big(\hat{f}(\lambda)\overline{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g(x)e^{-i\lambda x}\,dx}\Big)d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda)\overline{\hat{g}(\lambda)}\,d\lambda.$$

Изменение порядка интегрирования законно в силу теоремы Фуббини. Если положить здесь $f = g$, то получится равенство $\|g\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}$. $\square$

Преобразование Фурье — это линейный интегральный оператор в разных пространствах функций на $\mathbb{R}$. В L_2 в базисе из функций Эрмита преобразование Фурье имеет диагональный вид с числами ± 1 и $\pm i$ на диагонали. 4-я степень преобразования Фурье — единичный оператор.

Функции Эрмита — ортогонализация системы функций $x^n e^{-x^2/2}$:

$$\varphi_n(x) = H_n(x)e^{-x^2/2}, \quad H_n(x) = c_n(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$$

Как это всё увидеть-понять? Напишем уравнение $f'' - x^2 f = \mu f$. С точки зрения преобразования Фурье это уравнении содержит некоторую симметрию: при преобразовании Фурье f'' как раз меняется местами с $-x^2 f$. Поэтому неудивительно, что решения такого уравнения — это собственные функции преобразования Фурье.

В S_∞ это уравнение правильно решать заменой $f(x) = e^{x^2/2}w(x)$, где w — многочлен от x. Подставим, получим $w'' - 2xw' = (\mu+1)w$. Если подставить в это уравнение многочлен общего вида степени n, то получатся уравнения, причем $\mu = -(2n+1)$, $a_n = 1$, $a_{n-1} = 0$ и $a_{k-2} = \frac{k^2-k}{2k-2n-4}a_k$.

Такое представление собственных функций, как решение дифуров, очень удобно. Например, ортогональность в $L_2(\mathbb{R})$ можно увидеть сразу из уравнений.

Лекция 6 (18 мая 2015)

На этой лекции мы начинаем тему про криволинейные и поверхностные интегралы. То, что я вам буду рассказывать — это такая старая-старая классика. Более того, все это именно в таком виде и было придумано когда-то. И будет рассказано в таком старомодном стиле. Другой вариант этого всего вы знаете, по крайней мере что-то. Вы знаете, что такое дифференциальные формы, вы знаете общую абстрактную формулу Стокса. В 2-3-мерных пространствах абстрактная формула Стокса имеет частный вид формул типа формулы Грина. Я построю эту теорию (для пространств размерности 2 и 3) на основании простых вещей, не использующих "почти ничего".

Когда я буду говорить об интегралах, то интеграл Лебега я использовать не буду, если случайно я буду что-то говорить о нём, то я буду специально подчеркивать это. Во всей теории используется только интеграл Римана, во первых, — по традиции. Во вторых, для наших целей не нужен интеграл Лебега (функции гладкие). В третьих, интеграл Римана в рассматриваемых задачах удобнее. Ну и в четвёртых, у нас будут интегралы по ориентируемым многообразиям и интеграл Лебега просто не годится, по крайней мере без существенных переделок.

В первом семестре и в прошлом модуле мы строили кучу хитрых примеров, различные канторовы множества, неизмеримые множества, борелевские множества, сложно устроенные функции... Приводились примеры непрерывных функций, не имеющих производных нигде, сингулярных функций.

Теперь всё будет по-другому. Основной смысл всех конструкций важен для случая хороших множеств, с хорошей границей, гладких функций. Почти всюду будут отсутствовать хитрые, громоздкие контрпримеры. Другие цели — другие объекты, другие методы.

Я не буду напоминать определение кратного интеграла Римана. Предел интегральных сумм, существует, если и только если множество точек разрыва имеет меру Лебега ноль. Сформулирую только 2 основных метода подсчёта интегралов, а то механики ругались, что вы их совсем не помните.

Сведение кратного интеграла к повторному

Пусть множество E, по которому мы интегрируем функцию непрерывную функцию $f(x,y)$, расположено между графиками двух непрерывных функций $\varphi(x) < \psi(x)$:

$$E = \{(x,y):\ a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}.$$

Такое множество E измеримо по Жордану, очевидно.

По смыслу это совершенно как теорема Фуббини, только не совсем она.

Теорема. *Справедливо равенство*

$$\int\!\!\int_E f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy.$$

Замена переменных в кратном интеграле

Буду всё писать в двумерном пространстве, можно считать, что n-мерное.

Пусть G — открытое множество на плоскости R^2_{uv}, пусть G^* — открытое множество на плоскости R^2_{xy}. Пусть F — отображение $G \to G^*$.

Отображение задаём парой функций $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$.

Будем предполагать, что:

1) F взаимно однозначно,

2) F непрерывно дифференцируемо,

3) якобиан $J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ не обращается в ноль на G.

Теорема. *Справедливо равенство*

$$\int_{G^*} f(x,y)dxdy = \int_G f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv.$$

1 Криволинейные интегралы

Философия. На отрезке на прямой мы определяли 2 разных интеграла — интеграл Римана "как на первом курсе" и интеграл Лебега (или кратный интеграл, как год назад). Эти интегралы различались принципиально: первый был интеграл по ориентируемому множеству «отрезок», второй — по неориентируемому, в частности по любому измеримому по Жордану. При этом значения интеграла (если они все существовали) совпадали с точностью до знака.

Близкая ситуация в криволинейных интегралах, интегралах по кривым. Бывают криволинейные интегралы по неориентирумым кривым, а бывают — по ориентируемым. На кривых разные интегралы принимают уже разные значения, интегрируются разные объекты, они имеют разный геометрический и физический смысл.

Такая ситуация связана в первую очередь с тем, что оба типа интегралов востребованы при решении физических задач.

Криволинейные интегралы первого рода

Пусть задана непрерывно дифференцируемая функция $r : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ без особых точек ($r' \neq 0$). Она определяет кривую Γ в пространстве, кривую без особых точек, но с возможными самопересечениями.

Определение. *Пусть функция f со значениями в $\mathbb{R}$ определена на множестве Γ и непрерывна. Тогда величина*

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,ds := \int_a^b f\big(r(t)\big)\,|r'(t)|\,dt \equiv \int_a^b f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\,dt$$

называется криволинейным интегралом первого рода от функции f по кривой Γ.

Физик легко видит, что этот интеграл позволяет найти массу материальной кривой при переменной линейной плотности, центр её тяжести, моменты инерции, сопротивление при переменном удельном сопротивлении.

КИ не зависит от параметризации. Пусть $g(\tau) : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ — монотонная непрерывно дифференцируемая функция, $g' \neq 0$. Либо $g(\alpha) = a, g(\beta) = b, \operatorname{sign} g' \equiv 1$, либо $g(\alpha) = b, g(\beta) = a, \operatorname{sign} g' \equiv -1$. Теперь

$$\int_\alpha^\beta f\big(r(g(\tau))\big)\,|r'(g(\tau))|\,|g'(\tau)|\,d\tau = (\operatorname{sign} g') \int_\alpha^\beta f\big(r(g(\tau))\big)\,|r'(g(\tau))|\,g'(\tau)\,d\tau =$$
$$= (\operatorname{sign} g') \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f\big(r(t)\big)\,|r'(t)|\,dt = \int_a^b f\big(r(t)\big)\,|r'(t)|\,dt$$

Гладкая кривая является спрямляемой (напомнить). В качестве хорошего параметра удобно выбирать переменную длину кривой от одного из концов. Тогда (S — длина кривой)

$$\int_\Gamma f(x, y, z)\,ds = \int_0^S F(r(s))\,ds, \qquad \int_\Gamma ds = S.$$

Формулы получаются короче, однако для подсчета не очень годятся.

Можно взять отрезок $[0, S]$. На нём рассмотреть меру Лебега. На кривой индуцируется мера, длина каждой дуги кривой совпадает с длиной соответствующего отрезка. Тогда интеграл 1-го рода по кривой — это просто интеграл Лебега на отрезке $[0, S]$.

Можно определять криволинейный интеграл для спрямляемой кривой. Со случая непрерывной функции можно получить обобщение на интегрируемые по Лебегу или по Риману функции.

Я писал в $\mathbb{R}^3$, можно написать в $\mathbb{R}^2$ или в $\mathbb{R}^n$.

Криволинейные интегралы второго рода.

Зафиксируем систему координат в $\mathbb{R}^3$. Пусть задана непрерывно дифференцируемая функция $r : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ без особых точек ($r' \neq 0$). Пусть $\Gamma = r([a, b])$ — гладкая ориентированная кривая в $\mathbb{R}^3$ (непрерывно дифференцируемая и производная не обращается в 0).

Ориентированная — это означает, что на ней выбрано начало-конец, или, что на ней выбрано направление (тогда можно и для замкнутого контура определить направление).

Единичный вектор $e = e(t)$ касательной к Γ можно записать в виде $e = r'(t)/|r'(t)|$ или в виде

$$e = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{ds}{ds},\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

где s — параметризация кривой её длиной, а α, β, γ — углы касательного вектора e с базисными векторами.

Пусть на кривой задано векторное поле $F = \{P, Q, R\}$. Можно сказать, что на кривой задана 1-форма $Pdx + Qdy + Rdz = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$. Это одно и то же.

Определение. *Величина* $\displaystyle\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz := \int_a^b (F,r')dt = \int_a^b \left(Px'+Qy'+Rz'\right)\,dt$ *называется* криволинейным интегралом второго рода *от формы или от векторного поля по* Γ.

В частности, например, $\displaystyle\int_\Gamma P\,dx = \int_a^b P(x(t),y(t),z(t))x'(t)\,dt$. Легко запомнить: в формуле для интеграла нужно всего лишь подставить вместо x,y,z параметризацию $x(t),y(t),z(t)$ и дифференциалы dx,dy,dz записать как интегралы от t: $dx=x'dt$ и т.д.

Естественно, на плоскости тоже можно рассмотреть кривую, на ней рассмотреть плоское векторное поле и определить интеграл по этой кривой:

$$\int_\Gamma Pdx+Qdy := \int_a^b (F,r')dt = \int_a^b \left(Px'+Qy'\right)\,dt.$$

Такой интеграл в элементарной физике — это работа силы при движении точки по кривой линии.

Для того, чтобы определение было осмысленным, надо, чтобы соответствующие интегралы существовали. Мы будем все время предполагать непрерывность векторного поля, поэтому интегралы по кусочно гладким кривым существуют.

Интеграл второго рода можно выразить через интеграл от первого рода:

$$\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz = \int_\Gamma (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds,$$

следует из $x'=\cos\alpha|r'|, y'=\cos\beta|r'|, z'=\cos\gamma|r'|$, ориентация спрятана в знаки косинусов.

Криволинейный интеграл второго рода не зависит от параметризации фиксированной ориентации и меняет знак при параметризации другой ориентации.

Оба криволинейных интеграла обладают свойством аддитивности по кривым: Если разбить гладкую кривую на два куска, то интеграл по кривой будет равен сумме интегралов по кускам. Это свойство положим в качестве определения интеграла по кусочно гладким непрерывным кривым.

Определение *интеграла по кусочно гладкой кривой, как суммы интегралов по гладким кускам.*

Свойство. *Интеграл от константы по замкнутому контуру равен нулю: если* $A=(a_z,a_y,a_z)$, $B=(b_x,b_y,b_z)$, *то*

$$\int_{AB} dx = b_x-a_x,\quad \int_{AB} dy = b_y-a_y,\quad \int_{AB} dz = b_z-a_z,$$

то есть не зависит от кривой.

Основная лемма. *Пусть есть компакт* $E\subset\mathbb{R}^3$, *пусть есть кусочно гладкая кривая* $\Gamma\subset E$, *её параметризация* $r(t)$, *разбиение* τ *отрезка* $[a,b]$ *точками* t_k, *возникающая ломанная* $\Lambda_\tau\subset E$, *векторное поле* P,Q,R, *непрерывное на* E. *Тогда*

$$\lim_{\delta(\tau)\to0}\int_{\Lambda_\tau} Pdx+Qdy+Rdz = \int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz$$

($\delta(\tau)$ — мелкость разбиения.)

Доказательство проведем для случая $Q \equiv R \equiv 0$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на мелкие кусочки точками t_i. Так, чтобы точки r_{t_i} мелко разбили кривую Г. Настолько мелко, чтобы $|P(r(t)) - P(r(t_i))| < \eta$ при $t \in [t_i, t_{i+1}]$ при всех i.

Теперь рассмотрим ломанную с таким вот мелким разбиением и сравним интеграл по кривой с интегралом по хорде:

$$\Delta_i = \int_{\widehat{r_{t_i}, r_{t_{i+1}}}} P\,dx - \int_{\overline{r_{t_i}, r_{t_{i+1}}}} P\,dx = \int_{\widehat{r_{t_i}, r_{t_{i+1}}}\,\overline{r_{t_{i+1}}, r_{t_i}}} P\,dx = \int_{\widehat{r_{t_i}, r_{t_{i+1}}}\,\overline{r_{t_{i+1}}, r_{t_i}}} (P - P(r(t_i)))\,dx$$

(интеграл по замкнутому контуру от константы равен нулю!). Теперь $|\Delta_i| < 2\eta(s(t_{i+1}) - s(t_i))$, следовательно, $\sum |\Delta_i| \leqslant 2\eta S$ (S — длина кривой Г). □

Естественно, для криволинейных интегралов справедливы и другие теоремы о предельном переходе. Например, если всё непрерывно и $P_n \rightrightarrows P, Q_n \rightrightarrows Q, R_n \rightrightarrows R$ на Г, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Gamma P_n dx + Q_n dy + R_n dz = \int_\Gamma P dx + Q dy + R dz.$$

Эту формулу легко увидеть, например, из определений. Однако, она ниже не используется и в виде отдельной теоремы такой факт не формулируется.

Формула Грина

Напомню, что положительная ориентация контура относительно области — это когда движение по контуру оставляет область слева.

Плоские кривые. Написать основные формулы на плоскости:

$$\int_\Gamma P dx + Q dy = \int_\Gamma (P\cos\alpha + Q\sin\alpha) ds.$$

Отметить разницу между комплексными интегралами и вещественными: не каждое векторное поле, гладкое, порождает аналитическую комплексную функуию.

Теорема (Формула Грина). *Пусть D — ограниченная связная плоская область, граница которой ∂D состоит из конечного числа попарно непересекающихся простых кусочно гладких контуров Γ_j ($\partial D = \coprod_{i=1}^k \Gamma_j$), ориентированных положительно относительно области D. Пусть на замыкании $\bar{D}$ области D задано непрерывно дифференцируемое векторное поле (P, Q). Тогда справедлива* формула Грина

$$\int\!\!\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial D} P dx + Q dy.$$

Плоскую область D назовем *простой относительно оси Ox*, если она имеет вид

$$D = \{(x, y) :\ \varphi(y) < x < \psi(y), c < y < d\}$$

где $\varphi < \psi$ непрерывны и кусочно непрерывно дифференцируемы на $[c, d]$, аналогично, назовем D *простой относительно оси* Oy, если она имеет вид

$$D = \{(x, y) : \ \varphi(x) < y < \psi(x), a < x < b\}$$

где $\varphi < \psi$ непрерывны и кусочно непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$.

Плоскую область назовём *простой*, если она является простой относительно одной из координатных осей. $\boxed{\textit{\textbf{Любая выпуклая область является простой относительно обеих осей.}}}$

Определение. *Будем говорить, что ограниченная плоская область D разрезана на конечное число областей D_i, если*

1. $\bigcup D_i \subset D$;
2. $D_j \bigcap D_j = \emptyset$ при $i \neq j$;
3. $\bigcup \bar{D}_i = \bar{D}$;
4. $(\partial D_i \bigcap \partial D_j) \bigcap D$ при $i \neq j$ является либо пустым множеством, либо точкой, либо промежутком на какой-либо прямой.

Лемма. *Если ограниченная плоская область D разрезана на конечное число областей D_i, причем все границы всех областей являются кусочно гладкими кривыми, то из справедливости ФГ для областей D_i следует ФГ для области D.*

Утверждение леммы легко вытекает из определений, и похоже на конструкции из ТФКП.

Доказательство ФГ состоит из нескольких частей. Часть первая — доказательство ФГ для *простых* областей. Часть вторая — распространение ФГ на более сложные области — которые можно разрезать на конечное число простых. Часть третья — доказательство ФГ в общем случае.

Часть I.

Достаточно установить ФГ при $Q = 0$, так как случай $P = 0$ рассматривается аналогично, вместе они приводят к ФГ общего вида.

Шаг 1. Докажем

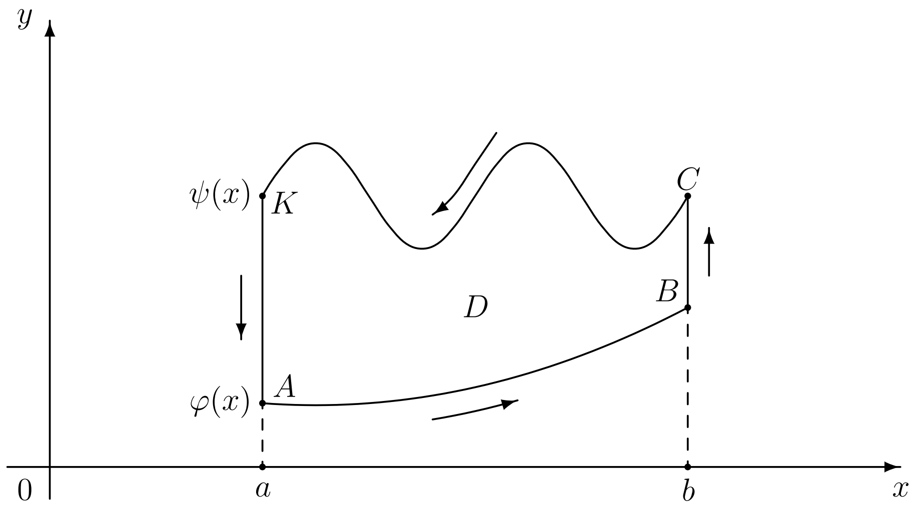
$$\int\int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = -\int_{\partial D} P\, dx$$

в случае, когда D — простая относительно оси Oy. Воспользуемся формулой сведения двойного интеграла к повторному и формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int\int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b [P(x, \psi(x)) - P(x, \varphi(x))] dx =$$

$$= \int_{KC} P(x, y) dx - \int_{AB} P(x, y) dx = -\int_{CK} P\, dx - \int_{AB} P\, dx = -\int_{\partial D} P\, dx.$$

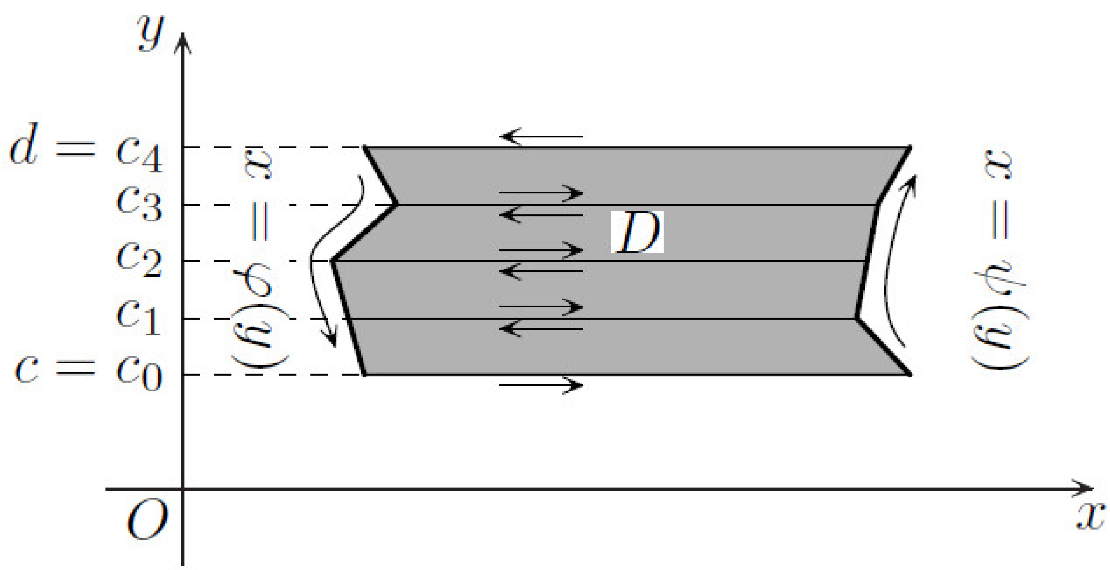
на последнем шаге мы воспользовались тем, что интеграл от формы $P\, dx$ по вертикальным отрезкам DA и BC равен нулю.



Шаг 2. Докажем ту же самую формулу

$$\int\int_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_{\partial D} P\,dx$$

в случае, когда D — простая относительно оси Ox, причем боковые функции — это ломаные, состоящие из конечного числа отрезков. Разрежем область на трапеции, ориентируем все границы, очевидно, что трапеции, если надо, легко разрезать на простые области относительно оси Oy, этот случай рассмотрен.



Шаг 3. Перейдем к случаю, когда D — простая относительно оси Ox общего вида, то есть графики граничных функций от y не ломанные, а просто гладкие функции.

Впишем в боковые части границы ломанные, с достаточно мелким разбиением. Для областей, ограниченных этими ломанными, напишем ФГ. Теперь перейдем в этой формуле к пределу. Для двойного интеграла пользуемся непрерывностью производной и малостью меры плоских множеств между ломанной и кривой. Для криволинейного интеграла пользуемся утверждением[3].

На этом шаге есть маленькая проблема, которую я счёл автоматически разрешенной, когда нарисовал, что ломанные не пересекаются. Об этом следует задуматься, но проблема легко преодолима: сначала замечаем, что боковые границы отстоят друг от друга на положительное число, а потом рассматривать только достаточно мелкие ломанные.

Шаг 4. Переход от случая, рассмотренного на шаге 3 к общему случаю, когда левая и правая границы кусочно гладкие очевиден: нарежем горизонтальными линиями на области с гладкими боковыми границами.

Замечание. Заметим, что такой некрасивый шаг 2 (или его аналог) необходим. Формулу

$$\int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial Q}{\partial x} dy$$

хорошо преобразовать не удается.

Часть 2.

Если область D можно разрезать на конечное число простых областей, то ФГ для D очевидно следует из ФГ для этих простых областей.

Часть 3.

Осталось доказать следующий факт: *ограниченная связная плоская область D, граница которой ∂D состоит из конечного числа попарно непересекающихся простых кусочно гладких контуров Γ_j ($\partial D = \coprod_{i=1}^k \Gamma_j$), ориентированных положительно относительно области D, может быть разрезана на конечное число простых областей.*

Берем гладкую кривую AB, покажем, что найдется близкая ломанная (близкая — чтобы не задевать остальные куски границы) с концами на кривой, такая что область между ломанной и кривой является простой.

Это следует из такого утверждения: пусть есть пара непрерывных функций $x(t), y(t), t \in [a, b]$, пусть $x^2(t) + y^2(t) \neq 0$. Тогда отрезок $[a, b]$ можно разбить на конечное число промежутков, на каждом из которых хотя бы одна функция x или y имеет постоянный знак.

Для доказательства надо взять ненули $x(t)$, это открытое множество, оно состоит из интервалов Δ_x^k, надо взять ненули $y(t)$, это открытое множество, оно состоит из интервалов Δ_y^j. Из покрытия отрезка интервалами Δ_x^k и Δ_y^j надо выбрать конечное подпокрытие.

Таким образом, мы сможем около каждой гладкой кривой, составляющей часть границы, построить ломанную так, чтобы все куски были простые относительно одной из осей. Ломанную надо строить, чтобы не налезть на другие части границы.

Осталось проследить, чтобы ломанные были настолько близки друг к другу, что бы они не пересекались.

[3] Есть кривая Γ, её параметризация $r(t)$, разбиение τ отрезка $[a, b]$ точками t_k, возникающая ломанная Λ_τ, векторное поле P, Q, R, непрерывное в ε-окрестности кривой Γ, тогда предел интегралов по ломанным равен интегралу по кривой.

В случае границы без клювов — проблем не возникает. А в случае клюва (это точка, где вектор касательной разворачивается на π) надо его отдельно отрезать маленьким отрезком, получившийся рожок — всегда простая область.

Формула Грина доказана.

Самый замечательный криволинейный интеграл на плоскости. Пусть $(P, Q) = (0, x)$ или $-\frac{1}{2}(-y, x)$ или $(-y, 0)$. Тогда $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$ и по ФГ

$$\mu(D) = \int_{\partial D} x\,dy = \frac{1}{2}\int_{\partial D} -y\,dx + x\,dy = -\int_{\partial D} y\,dx.$$

Комментировать все последние формулы не буду, но формула

$$\mu(D) = -\int_{\partial D} y\,dx$$

для площади криволинейной трапеции под графиком функции $y(x)$ очевидна: интеграл по вертикальным боковым сторонам равен 0 из-за dx, интеграл по основанию равен 0 из-за y, интеграл по графику функции равен как раз определенному интегралу (минус из за движения справа налево).

Лекция 7 (25 мая 2015)

На прошлой лекции мы ввели криволинейные интегралы первого и второго рода, в том числе самый замечательный интеграл

$$\mu(D) = -\int_{\partial D} y\,dx$$

для площади. Эта замечательная формула следовала из *формулы Грина*

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy.$$

В этой формуле слева стоит кратный интеграл Римана по области, как год назад, справа — криволинейный интеграл II-го рода, ориентация на ∂D выбирается положительная, то есть при движении вдоль кривой область находится слева.

Впрочем, эта формула для простого случая, когда область D была просто криволинейной трапецией (подграфиком функции $y(x)$), хорошо вам известна: площадь равна интегралу Римана от a до b, а интеграл по границе равен ему же (по прямолинейным кускам либо $y = 0$ по горизонтали, либо $dx = 0$ по вертикали), а знак минус так как направление обхода в сторону от $y(b)$ к $y(a)$.

Теперь мы продолжим изучение криволинейных интегралов.

Потенциальные векторные поля. Вернёмся в $\mathbb{R}^3$.

Определение. *Векторное поле $\vec{A} = (P, Q, R)$ называется потенциальным, если есть такая функция $U(x, y, z)$, что*

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad R = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Функция U называется *потенциалом* поля $\vec{A}$, $\vec{A} = \operatorname{grad} U = \nabla U$ или $dU = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$. Здесь ∇ — символический вектор "набла" $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$.

Определение. *Пусть Γ — замкнутый кусочно гладкий контур. Интеграл $\int_\Gamma(\vec{A}, d\vec{r})$ называется циркуляцией поля $\vec{A}$ по контуру Γ.* (это интеграл 2го рода!)

Теорема. *Пусть есть непрерывное векторное поле $\vec{A}$ в области $G \in \mathbb{R}^3$. Тогда следующие 3 условия эквивалентны.*

(1) *Поле потенциально в G;*

(2) *Для любого кусочно гладкого контура циркуляция поля равна нулю.*

(3) *Для любых двух точек интеграл $\int_\Gamma(\vec{A}, d\vec{r})$ по любой кусочно гладкой кривой из B в C не зависит от выбора кривой.*

Из (2) следует (3) и из (3) следует (2) — просто, нарисовать картинку и стрелочки.

Покажем, что из (1) следует (3). Пусть поле $\vec{A}$ потенциально и пусть U — его потенциал. Пусть $\widehat{BC}$ — гладкая кривая с началом в точке B и с концом в точке C, задаваемая вектор функцией

$\{x(t), y(t), z(t)\},\ t \in [a, b]$. Тогда

$$\int_{BC} Pdx + Qdy + Rdz = \int_a^b (Px' + Qy' + Rz')\, dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(U(x(t), y(t), z(t)))\, dt = U(C) - U(B).$$

Наконец, покажем, что из (3) следует (1). Зафиксируем точку B и положим

$$U(C) = \int_{BC} Pdx + Qdy + Rdz,$$

где интегрирование берется по произвольной кривой с началом в точке B и с концом в точке C. Такое определение функции корректно, по условию (3). Покажем, что $\operatorname{grad} U = (P, Q, R)$. Установим только равенство $\partial U/\partial x = P$. Обозначим $C = (x, y, z), C_{\Delta x}(x + \Delta x, y, z)$

$$(2) \quad \Delta U = U(x + \Delta x, y, z) - U(x, y, z) = \int_{\overline{CC_{\Delta x}}} Pdx + Qdy + Rdz =$$
$$\int_0^1 P(x + t\Delta x, y_0, z_0) d(x + t\Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} P(t, y_0, z_0) dt = \Delta x P(\theta, y, z),$$

где $\theta \in [x, x + \Delta x]$. отсюда следует $\partial U/\partial x = P$. $\square$

Из доказательства теоремы следует явный вид потенциала в виде формулы

$$U(X) = \int_{BX} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Введем в рассмотрение *ротор* (вихрь) поля $\vec{A}$:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) k.$$

Определение. *Поле называется безвихревым в области G, если $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{0}$ на G.*

Теорема. *Если C^2-поле потенциально, то оно безвихревое. Если область является образом шара (точнее, если всякая поверхность, гомеоморфная сфере, стягиваема в точку, называется — "поверхностная односвязность"), то безвихревое поле потенциально.*

В одну сторону — очевидно и следует из равенства нулю смешанных производных.

В другую — докажем потом, как следствие формулы Стокса.

Теорема. *Пусть в плоской односвязной области G задано C^2-поле, причем $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ в G. Тогда это поле потенциально.*

Достаточно показать, что интеграл вдоль любого замкнутого контура равен нулю, а он равен 0 в силу формулы Грина.

Контрпример. Односвязность существенна. Плоское поле $\vec{A} = (-y/(x^2+y^2), x/(x^2+y^2)$ задано везде, кроме начала координат. Оно безвихревое: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = (y^2 - x^2)/(x^2 + y^2)^2$. Поле $\vec{A}$ не потенциально: отлична от нуля его циркуляция по окружности $\gamma = \{x + iy = e^{it}, t \in [0, 2\pi]\}$:

$$\int_\gamma (\vec{A}, d\vec{r}) = \int_0^{2\pi} (-\sin t(-\sin t) + \cos t\, \cos t) dt = 2\pi \neq 0.$$

Элементы теории поверхностей в $\mathbb{R}^3$. Когда-то в первом модуле я давал всяческие n-мерные определения поверхности в $\mathbb{R}^n$. Основное определение было такое:

Основное определение. *Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется k*-мерной *поверхностью гладкости p, если для любой точки $x_0 \in S$ найдется окрестность $U(x_0) \in \mathbb{R}^n$, и диффеоморфизм $\varphi : U(x_0) \mapsto \mathbb{R}^n$ гладкости p окрестности $U(x_0)$ на окрестность $O \subset \mathbb{R}^n$ начала координат, такие что множество $\varphi(S \bigcap U(x_0))$ совпадает с множеством $\{t \in O : t_{k+1} = \ldots = t_n = 0\}$.*

Из теоремы о неявной функции следовало такое утверждение.

Теорема. *Пусть отображение окрестности $\varphi : U \in \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $n > k$ имеет гладкость C^p, $p \geqslant 1$ и пусть $\operatorname{rang} \varphi = k$ в каждой точке U. Тогда образ $\varphi(U(t))$ некоторой окрестности $U(t) \subset U$ каждой точки $t \in U$ — это поверхность гладкости p размерности k в $\mathbb{R}^n$.*

За числом p я сейчас следить не буду, в трёхмерном пространстве бывает гладкая кривая и двумерная поверхность в $\mathbb{R}^3$.

Гладкая поверхность: C^1-отображение $\vec{r} = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, удовлетворяющее

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} = 2 \qquad \text{на} \quad D,$$

а также образ такого отображения. Это всё соответствует общим определениям, которые я привел выше. Гладкая поверхность *простая*, если отображение $(u, v) \mapsto S$ взаимно однозначно (нет самопересечений).

Замечу, что эти все определения локальные, но не глобальные. Они не описывают сферу целиком, её нельзя представить себе в виде гладкого образа диска, однако локально, каждый кусочек сферы, является образом диска.

Замечу, что поверхности могут быть заданы неявно скалярным уравнением $F(x, y, z) = 0$. Я почти не буду рассматривать связанные с этим формулы. Все равно при вычислениях приходится всё параметризовать, переходить от неявной формулы к параметрической.

Координатные линии: семейства кривых $\{\vec{r}(u, v_0), \vec{r}(u_0, v),\ (u, v_0), (u_0, v) \in D\}$. Вектора $\vec{r}'_u(u_0, v_0)$ и $\vec{r}'_v(u_0, v_0)$ — касательные к координатным линиям.

Пусть есть плоская область D, гладкая поверхность $S = \vec{r}(u, v)$, точка $M = \vec{r}(u_0, v_0)$, кривая $\Gamma = \{u(t), v(t), t \in [a, b]\}$ на плоскости (u, v), проходящая через (u_0, v_0) при $t = t_0$.

Тогда кривая $\gamma = \vec{r}(u(t), v(t))$ лежит на поверхности S, проходит через точку M. Касательный вектор к γ в точке M определяется равенством

$$\vec{r}_t'(t_0) = \vec{r}_u'(u_0, v_0)u_t'(t_0) + \vec{r}_v'(u_0, v_0)v_t'(t_0).$$

Это есть дифференцирование сложной функции $\vec{r}(u(t), v(t))$.

Касательная плоскость — это геометрический объект, плоскость, проходящая через точку гладкой поверхности, параллельная векторам $\vec{r}_u'(u_0, v_0)$ и $\vec{r}_v'(u_0, v_0)$. Касательное пространство — двумерное пространство векторов вида $\vec{r}_u'(u_0, v_0)du + \vec{r}_v'(u_0, v_0)dv$, где du и dv — прозвольные скаляры. Афинная плоскость «M+касательное пространство» — это касательная плоскость. При маленьких du и dv касательная плоскость близка к поверхности, это формула Тейлора.

Можно ввести понятие касательной прямой к кривой, тогда касательная плоскость в точке — множество всех касательных прямых ко всем кривым, проходящим через эту точку.

Уравнение касательной плоскости через смешанное произведение: $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}_u' \times \vec{r}_v') = 0$. Векторное произведение $\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'$ — нормаль, касательная плоскость перпендикулярна нормали и проходит через точку M. В координатной форме уравнение плоскости имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix} = 0.$$

Определение нормальной прямой и нормального вектора. Обозначим

$$A = \det(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}), \qquad B = \det(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}), \qquad C = \det(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}).$$

Тогда $\quad \vec{r}_u' \times \vec{r}_v' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}.$

Условие невырожденности про «ранг равен 2» имеет вид $A^2+B^2+C^2 \neq 0$ или, что то же, $\vec{r}_u' \times \vec{r}_v' \neq \vec{0}$.

Прямая, проходящая через точку $M \in S$ и перпендикулярная касательной плоскости в M, называется *нормальной прямой* к поверхности.

Всякий ненулевой вектор, коллинеарный нормальной прямой называется нормалью. "Основная" нормаль — это вектор $\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'$. Уравнение нормальной прямой имеет вид

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{x - x_0}{y_u' z_v' - z_u' y_v'} = \frac{y - y_0}{z_u' x_v' - x_u' z_v'} = \frac{z - z_0}{x_u' y_v' - y_u' x_v'}.$$

Естественно, если какое-то из чисел A, B, C равно 0, то соответствующая координата — константа.

Явно заданная поверхность: $\vec{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))$, $\vec{r}_x' = (1, 0, f_x')$, $\vec{r}_y' = (0, 1, f_y')$

$$\vec{r}_x' \times \vec{r}_y' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_x' \\ 0 & 1 & f_y' \end{vmatrix} = -f_x'\vec{i} - f_y'\vec{j} + \vec{k}.$$

Уравнение касательной плоскости принимает вид

$$z - z_0 = (x - x_0)f_x'(x_0, y_0) + (y - y_0)f_y'(x_0, y_0),$$

уравнение нормальной прямой в точке (x_0, y_0) имеет вид

$$\frac{x - x_0}{f_x'(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y'(x_0, y_0)} = -(z - z_0).$$

Естественное переписывание всех формул для поверхностей, параметризованных y, z или x, z.

Преобразование всего при замене параметризации.

Пусть есть гладкая поверхность: отображение $\vec{r} : \bar{D} \to \mathbb{R}^3$.

Рассмотрим отображение $\mathcal{F}(t, s) : \bar{D}_1 \to \bar{D}$, $u = \varphi(t, s), v = \psi(t, s)$ и поверхность S_1, определяемую отображением $\vec{\rho}(t, s) = \vec{r}(\varphi(t, s), \psi(t, s))$.

Ясно, что если замена параметризации "хорошая" (однозначная-гладкая-невырожденная в каких-то смыслах), то поверхность, как геометрические объекты в $\mathbb{R}^3$ поверхности S и S_1 совпадают, формально, конечно, как отображения это разные поверхности. Будем считать, что поверхности S и S_1 — это разные параметризации одной и той же поверхности, если замена параметров $\mathcal{F}$ является *допустимой*. Это по определению означает, что

1. $\mathcal{F}$ взаимно однозначное отображение;

2. $\mathcal{F}$ непрерывно дифференцируемое и обратное отображение $\mathcal{F}^{-1}$ также непрерывно дифференцируемое;

3. $\det(\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(t, s)}) \neq 0$ $(\Rightarrow \det(\dfrac{\partial(t, s)}{\partial(u, v)}) \neq 0)$.

Так как $\vec{\rho}_t' = \vec{r}_u'\varphi_t' + \vec{r}_v'\psi_t'$ и $\vec{\rho}_s' = \vec{r}_u'\varphi_s' + \vec{r}_v'\psi_s'$, то $\vec{\rho}_t' \times \vec{\rho}_s' = \det(\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(t, s)})\, \vec{r}_u' \times \vec{r}_v'$.

Так как нормаль и касательная — геометрические объекты, то при замене параметризации они сохраняются. Эта формула нам потом понадобится для поверхностных интегралов.

Обсудить локальное и глобальное представление в виде явно заданной поверхности. Глобальное — не всегда возможно, локальное всегда (по определению гладкой поверхности: $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$).

Ориентация гладкой поверхности. Ориентация задаётся по-разному. На прямой ориентация кривой — это выбор начала и конца. Это очень внятная формулировка, однако она не работает на замкнутых кривых типа окружности.

Правильная формулировка ориентации на гладкой кривой — это выбор непрерывной касательной. Есть кривая $\vec{r}(t)$, предполагаем, что она гладкая, тогда $\vec{r}' \neq 0$, у неё есть в каждой точке касательная прямая $\vec{r}(t)+\alpha\vec{r}(t), \alpha\in\mathbb{R}$, ровно 2 вектора из неё единичные: $e(t)=\vec{r}'(t)/|\vec{r}'(t)|$, и $-\vec{r}'(t)/|\vec{r}'(t)|=-e(t)$. Выбор одного из семейств $e(t)$ или $-e(t)$, является выбором ориентации. Все равно, выбирать $e(t)$ или ненулевое непрерывное семейство касательных.

Так что привычные стрелочки, которые мы рисуем на кривых, говоря об ориентации, не случайны, это именно выбор направления на касательных. На плоскости можно говорить об ориентации «по часовой стрелке», но в $\mathbb{R}^3$ это уже бессмысленно!

Пусть S — гладкая параметрически заданная поверхность, единичный вектор

$$\vec{n}=\frac{\vec{r}_u'\times\vec{r}_v'}{|\vec{r}_u'\times\vec{r}_v'|}$$

является непрерывной функцией на $\bar{D}$, равно как вектор $-\vec{n}$. Обе эти функции являются – называются полем единичных нормалей поверхностей S.

Определение. Всякое непрерывное поле единичных нормалей гладкой поверхности называется *ориентацией.* Поверхность называется *двусторонней*, если она имеет две различных ориентации $\pm\vec{n}$. Ориентация $\vec{n}$ называется положительной.

Поверхность с выбранной ориентацией называется *ориентированной поверхностью.*

При замене параметризации ориентация сохраняется, если знак якобиана $+$ и меняется, если этот знак $-$. Это следует из формулы, которая только что была написана.

Геометрический смысл знака якобиана. Пусть есть плоская область и она взаимно однозначно гладко отображается на другую область, пусть якобиан не вырожден. Тогда он везде имеет фиксированный знак.

У плоской области нормали торчат либо в одну сторону от поверхности, либо в другую.

Если это “+”, то ориентация сохраняется, если он “−” — меняется на противоположную. Я не буду особенно подробно рассуждать, как выбирается ориентация в разных пространствах.

Немножко прокомментирую двумерный случай. Здесь возможны 2 подхода.

1. Берем гладкий ориентированный контур. Если $+$, то ориентация образа контура такая же, если $-$, то другая.

2. Есть две гладких ориентированных кривых, пересекающихся трансверсально. Образы этих кривых — тоже 2 ориентированных кривых, пересекающихся трансверсально. Берем меньший угол от 1й кривой ко второй, с учетом направления на кривых. Он либо из промежутка $(0,\pi)$, или из промежутка $(-\pi,0)$ (значения 0 и π не возможны в силу трансверсальности). Если $+$, то знак угла сохранится, если $-$, то поменяется.

Многие естественные поверхности глобально не являются гладким образом плоской области, но из можно разбить на конечное число гладких кусков, каждый из которых является таким образом. Например, сфера. Или тор. Тогда геометрически понятно, что такое «непрерывная нормаль», для написания формул надо разбить поверхность на куски, различные куски запараметризовать, и проследить, чтобы на общих частях параметризации соответствовали друг-другу, совпадали.

К ориентации кусочно гладких поверхностей мы ещё вернёмся.

На листе Мёбиуса нет поля непрерывных нормалей.

Лекция 8 (1 июня 2015)

На прошлой лекции я говорил о потенциальных векторных полях, о том как связаны различные свойства полей: существование потенциала, безвихревость, независимость интеграла от пути. Ещё я подготовительно сообщил простые необходимые сведения о двумерных поверхностях в $\mathbb{R}^3$.

Как я говорил, все эти вещи мегаважны в уравнениях Максвелла, также во всяческой гидродинамике и аэродинамике. Без них невозможно будет слушать доклады по всяческим таким наукам.

Неявно заданные гладкие поверхности

Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ — область и пусть $F : G \to \mathbb{R}$ — C^1-функция, причем $(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2 > 0$ на G. Тогда множество точек

$$S = \{(x, y, z) \in G : \; F(x, y, z) = 0\}$$

будем называть *неявно заданной гладкой поверхностью.*

Пример: сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \; R > 0$.

Локально неявно заданная гладкая поверхность всегда явно заданная гладкая поверхность — в силу теоремы о неявной функции.

Если, например, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ и $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, то по теореме о неявной функции в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) уравнение $F(x, y, z) = 0$ эквивалентно уравнению $z = f(x, y)$. Здесь $f \in C^1$,

$$f'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad f'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

В качестве нормали удобно брать вектор

$$\operatorname{grad} F := F'_x \vec{i} + F'_y \vec{j} + F'_z \vec{k}.$$

Уравнение касательной плоскости в точке (x_0, y_0, z_0) имеет вид

$$(x - x_0)F'_x(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)F'_y(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)F'_z(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

а уравнение нормальной прямой —

$$\frac{(x - x_0)}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{(y - y_0)}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{(z - z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Если рассматривать поверхность уровня функции F, то есть поверхность, определяемую уравнением $F(x, y, z) = 0$, то из вышеизложенного следует, что $\operatorname{grad} F$ ортогонален поверхности уровня.

Первая квадратичная форма. Пусть

$$S = \{\vec{r}(u, v), \; (u, v) \in \bar{D}\}$$

— гладкая параметрически заданная поверхность, то есть по определению $\vec{r}_u', \vec{r}_v'$ непрерывны на замкнутой области $\bar{D}$ и $\vec{r}_u' \times \vec{r}_v' \neq \vec{0}$ на $\bar{D}$.

Рассмотрим дифференциал $d\vec{r} = \vec{r}_u' du + \vec{r}_v' dv$. Тогда

$$|d\vec{r}\,|^2 = |\vec{r}_u'|^2 du^2 + 2(\vec{r}_u', \vec{r}_v') du dv + |\vec{r}_v'|^2 dv^2.$$

Положим $E = |\vec{r}_u'|^2$, $F = (\vec{r}_u', \vec{r}_v')$, $G = |\vec{r}_v'|^2$, тогда $|d\vec{r}\,|^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$.

Квадратичная форма $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ называется первой квадратичной формой поверхности, E, F, G — её коэффициенты.

Первая квадратичная форма всегда положительно определена, следовательно, $EG - F^2 > 0$, $E, G > 0$. Справедливо равенство

$$EG - F^2 = \left|\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'\right|^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

Это были такие обозначения:

$$A = \det(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}), \qquad B = \det(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}), \qquad C = \det(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}).$$

Определитель Грама матрицы Грама

$$\begin{pmatrix} (\vec{r}_u', \vec{r}_u') & (\vec{r}_u', \vec{r}_v') \\ (\vec{r}_u', \vec{r}_v') & (\vec{r}_v', \vec{r}_v') \end{pmatrix}$$

векторов $\vec{r}_u', \vec{r}_v'$ равен как раз $EG - F^2$ (написать определитель Грама). Определитель Грама системы n векторов равен квадрату n-мерного объёма параллелепипеда, натянутого на эти векторы.

Почему квадрату? Считаем, что все длины меряются в метрах, тогда определитель имеет размерность m^{2n}, ясно, что n-мерный объем имеет размерность m^n, надо корень извлечь. Это я к тому, что корень квадратный происходит из скалярного произведения, а не из размерности. В случае $n = 2$ площадь параллелограмма равна корню из определителя Грама $\sqrt{EG - F^2}$.

Кусочно гладкие поверхности.

Пусть на плоскости задана область D, граница которой ∂D является кусочно гладкой кривой. Например, квадрат или круг. Тогда образ $\vec{r} : \bar{D} \to \mathbb{R}^3$ назовем элементарным гладким куском поверхности или просто гладким куском.

Краем куска назовем образ $\vec{r}(\partial D)$ границы области D.

Правильное определение не совсем такое.

Множество S назовём поверхностью с краем, если любая точка $x \in S$ имеет окрестность O_x, диффеоморфную окрестности O в другой версии $\mathbb{R}^3$, причём x переходит в начало координат, и либо $O_x \bigcap S$ переходит в пересечение окрестности O и плоскости $z = 0$, либо часть окрестности на поверхности переходит в пересечение окрестности O и полуплоскости $x \geqslant 0, z = 0$.

Именно точки, окрестность O_x которых переходит в пересечение O и полуплоскости $x \geqslant 0, z = 0$, называются краем поверхности.

Край не обязательно связный — например, у боковой поверхности цилиндра есть 2 края, «верхний» и «нижний».

Грамматические сложности в определениях возникают естественным путём, иначе надо как-то определять открытые множества на поверхности. Интуитивно ясно, как это делать, но для этого надо как-то вводить метрику на поверхности или окрестности на поверхности.

Это определение поверхности с гладким краем. Поверхность с кусочно гладким краем определяется аналогично, только будет ещё конечное множество точек, в которых окрестность $O_x \bigcap S$ переходит в пересечение окрестности O и квадранта $x, y \geqslant 0, z = 0$.

Край поверхности с кусочно гладким краем — это кусочно гладкая кривая.

Два куска поверхностей S_1 и S_2 назовём *соседними*, если пересечение их краев является объединением конечного числа кусочно гладких кривых и, быть может, конечного числа точек.

Определение. Объединение $S = \bigcup S_k$ кусков поверхностей S_k, называется *кусочно гладкой поверхностью*, если

1. для любых двух кусков поверхностей S_i и S_j существует последовательность кусков поверхностей $S_i = S_{k_1}, \dots, S_{k_n} = S_j$, причем куски S_{k_m} и $S_{k_{m+1}}$ — соседние;

2. если пересечение краев двух кусков содержит бесконечное множество точек, то эти куски являются соседними;

3. пересечение краев трёх любых различных кусков поверхностей состоит не более чем из конечного множества точек.

Важное замечание. Раньше поверхность была образом области. Но не шар и не тор. Теперь кусочно гладкая поверхность — это уже может быть и тор, и шар, и лист Мёбиуса. А также цилиндр и куб.

Для каждого куска определим часть края, являющуюся также краем другого куска — это внутренняя часть края. Для каждого куска определим часть края, не являющуюся частью края никакого другого куска — это внешняя часть.

Объединение внешних частей краёв всех кусков — край кусочно гладкой поверхности.

Ориентация на поверхности (выбор нормали) и на её крае (направление на кривой) предполагается согласованы по правилу буравчика. Предположим, что мы движемся по ∂S в направлении его ориентации и единичная нормаль направлена снизу вверх, от ног к голове. Если ближайшая часть S остается слева по ходу движения, то тогда 2 ориентации — на кривой и на поверхности считаются согласованными.

Основная лемма об ориентации. *Пусть S — гладкий кусок поверхности, контур ∂D ориентирован положительно, ориентация края ∂S индуцирована ориентацией контура ∂D. Тогда* *ориентация*

$$\nu = \frac{\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'}{|\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'|} = \frac{A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}}{\sqrt{EF - G^2}}$$

куска S согласована с ориентацией его края ∂S.

Бесов §21.7 — длинная конструкция. Я её не буду рассказывать полностью.

Смысл этой конструкции для поверхности графика гладкой функции (нарисовать картинку). Пусть

$$S = \{(x, y, f(x, y)), (x, y) \in \bar{D}\}, \qquad \vec{n} = \frac{-f_x'\vec{i} - f_y'\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + (f_x')^2 + (f_y')^2}}.$$

Нормаль $\vec{n}$ имеет острый угол с вектором $\vec{k}$. Поэтому условие согласованности «по правилу буравчика» выполнено, для этого случая лемма совсем проста.

Общий случай сводится к этому.

Пусть есть кусочно гладкая поверхность, пусть есть два соседних куска поверхности, каждый из которых ориентирован. Эти две ориентации называем согласованными, если на общей границе они порождают противоположные ориентации.

Определение. *Кусочно гладкая поверхность называется ориентируемой, если существуют такие ориентации всех кусков поверхности, что ориентации всех смежных кусков согласованы.*

Теперь мы переходим к интегралам по поверхностям.

Здесь есть та же ситуация, что была с криволинейными интегралами. Для физических приложений важны 2 типа интегралов по поверхностям.

Поверхностный интеграл первого рода.

Прежде чем формулировать, что такое интеграл первого рода, я расскажу про площадь поверхности.

Площадь поверхности — по определению — это величина

$$\mu(S) = \int\int_D |\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'|\, dudv,$$

в силу свойств 1 и 2 площадь не зависит от параметризации.

Что получается за геометрическая картинка.

Рассмотрим разбиение плоскости (u, v) на квадратики со стороной h. Перенумеруем непустые пересечения с областью E_k, пусть квадратиков m штук. Каждый квадратик имеет вид

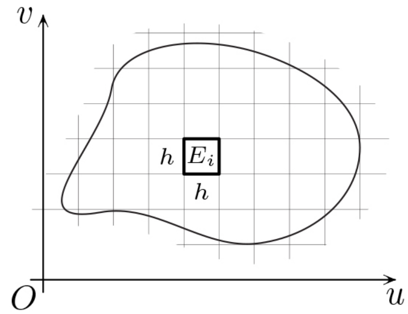
$$E_k = \{(u, v) : u_k \leqslant u \leqslant u_k + h,\ v_k \leqslant v \leqslant v_k + h\}.$$

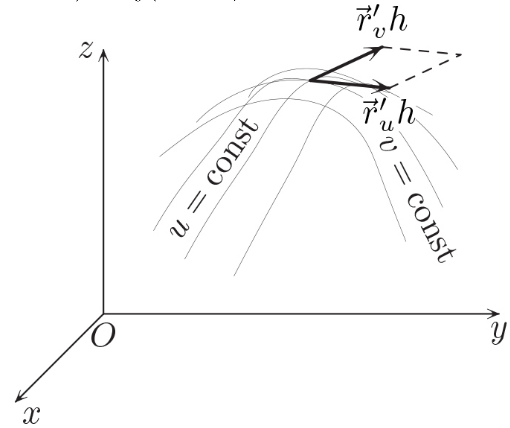
При переходе от вершины (u_k, v_k) квадрата E_k к соседним вершинам радиус вектор $\vec{r}(u, v)$ получит приращения

$$\vec{r}(u_k + h, v_k) - \vec{r}(u_k, v_k) = \vec{r}_u'(u_k, v_k)h + \vec{o}(h),$$

$$\vec{r}(u_k, v_k + h) - \vec{r}(u_k, v_k) = \vec{r}_v'(u_k, v_k)h + \vec{o}(h).$$

заменим образ квадрата E_k “близким” параллелограммом, лежащим в касательной плоскости к поверхности S в точке $\vec{r}(u_k, v_k)$ и построенной на векторах $\vec{r}_u'(u_k, v_k)h, \vec{r}_v'(u_k, v_k)h$ и имеющим площадь





$S_k = |\vec{r}_u'(u_k, v_k) \times \vec{r}_v'(u_k, v_k)|h^2$.

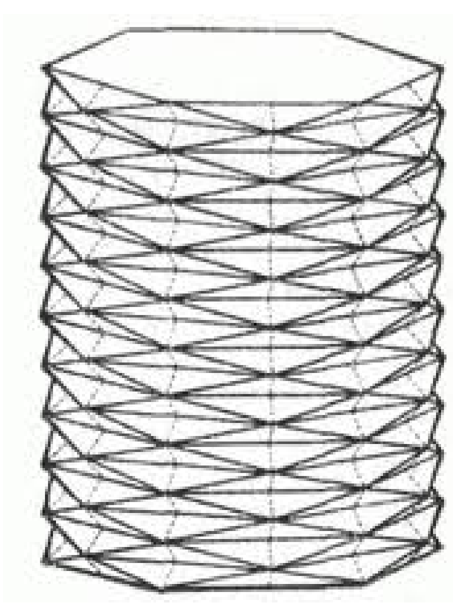
Если теперь написать сумму Римана $\sum_k S_k$, то она будет стремиться к $\mu(S)$.

Конечно, здесь еще надо аккуратно проговорить, что при $h \to 0$ вклад в сумму Римана кусочков тех квадратиков, что задевают границу D будет стремиться к нулю, но вроде это очевидно.

Выражение $|\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'|\, dudv$ называют элементом площади и обозначают dS. Учитывая формулы, что я писал на предыдущей лекции, получаем разные формы записи:

$$dS = |\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'|\, dudv = \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2} dudv = \sqrt{EG - F^2} dudv,$$

здесь E, G, F — коэффициенты первой квадратичной формы.



Были другие попытки (очень давно!) считать площадь гладкой поверхности по-другому — триангулировать её, посчитать суммарную площадь $\triangle$ и увидеть, что площадь гладкой поверхности равна пределу сумм площадей треугольников. Тут есть подводные камни.

Это сапог Шварца.

Разбиваем высоту цилиндра на n слоёв, окружности — на m одинаковых кусков. Вроде, очевидно, что треугольники получаются малого периметра. А если посчитать суммарную площадь всей “гармошки”, то получится, что она зависит от предела nm^{-2}.

Теперь перейдем к поверхностным интегралам первого рода.

Пусть задана гладкая поверхность $S = \{\vec{r}(u,v) : ((u,v) \in \bar{D}\}$, где D — плоская измеримая область (например, с кусочно гладкой или гладкой границей); $\vec{r}_u\,' \times \vec{r}_v\,' \neq 0$ на D.

Интеграл

$$\iint_S F(x,y,z)\,dS := \iint_D F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))|\vec{r}_u\,' \times \vec{r}_v\,'|\,dudv$$

называется поверхностным интегралом первого рода.

Типичное приложение: масса твёрдого листа с переменной плотностью F.

Свойства.

1. Интеграл существует, если поверхность C^1 и если F непрерывная — это основной случай.

2. Поверхностный интеграл первого рода не зависит от параметризации.

3. Аддитивность по множеству.

Пусть поверхность S имеет другое представление $S = \{\vec{r_1}(u_1,v_1) : ((u_1,v_1) \in \bar{D}_1\}$, где $\bar{D}_1$ — также плоская измеримая область и

$$\vec{r_1}(u_1,v_1) = \vec{r}(u(u_1,v_1),v(u_1,v_1)) = (\varphi(u_1,v_1),\psi(u_1,v_1),\chi(u_1,v_1)),$$

и $u = u(u_1,v_1),\ v = v(u_1,v_1)$ — допустимая замена параметров. То есть (u,v) и (u_1,v_1) связаны диффеоморфизмом $u = u(u_1,v_1), v = v(u_1,v_1)$.

Тогда с помощью формул, возникающих при замене параметризации и теореме о замене переменных в двойном интеграле получаем, что

$$\iint_{D_1} F(\varphi(u_1,v_1),\psi(u_1,v_1),\chi(u_1,v_1))|\vec{r}_{u_1}\,' \times \vec{r}_{v_1}\,'|\,du_1dv_1 =$$

$$= \iint_{D_1} F(\varphi(u_1,v_1),\psi(u_1,v_1),\chi(u_1,v_1))|\vec{r}_u\,' \times \vec{r}_v\,'|\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(u_1,v_1)}\right|\,du_1dv_1 =$$

$$= \iint_D F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))|\vec{r}_u\,' \times \vec{r}_v\,'|\,dudv.$$

Площадь поверхности — по определению — это величина

$$\mu(S) = \iint_S dS = \iint_D |\vec{r}_u\,' \times \vec{r}_v\,'|\,dudv,$$

в силу свойств 1 и 2 площадь не зависит от параметризации. Масса поверхности неравномерной поверхностной плотности $F(x,y,z)$ вычисляется по формуле

$$m(S) = \iint_S F(x,y,z)\,dS.$$

Поверхностный интеграл первого рода по кусочно-гладкой поверхности определяется как сумма по кускам. Площадь поверхности определяется как сумма площадей поверхностей кусков.

Естественно через поверхностный интеграл первого рода вычисляется центр тяжести, вычисляются моменты инерции, вычисляется заряд заряженной поверхности.

Поверхностные интегралы второго рода Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана гладкая поверхность $S = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in \bar{D}\}$, где D — плоская измеримая область (например, с кусочно гладкой или гладкой границей). По определению, $\vec{r}'_u, \vec{r}'_v \in C, \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v \neq 0$ на D. Положим

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|} = (\cos\alpha, \cos\beta \cos\gamma).$$

Поверхность S ориентируем выбором непрерывного поля единичных нормалей $\vec{\nu} = \pm\vec{n}$ и обозначим полученную ориентированную поверхность через $S^{\vec{\nu}}$.

Случай $\vec{\nu} = \vec{n}$ называем положительной ориентацией, случай $\vec{\nu} = -\vec{n}$ называем отрицательной ориентацией. Используем обозначение $S^{\pm}$ для ориентации $\pm$.

Пусть на поверхности задано векторное поле

$$\vec{A} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

Определение. *Потоком поля $\vec{A}$ через поверхность $S^{\vec{\nu}}$ (ещё говорят поток через поверхность S в направлении нормали ν) называется поверхностный интеграл первого рода*

$$\int\int_S (\vec{A}, \vec{\nu}) dS.$$

При замене ориентации поток меняет знак.

Определение. *Поток называют также поверхностным интегралом 2-го рода от векторного поля $\vec{A}$ по ориентированной поверхности $S^{\vec{\nu}}$.*

Можно говорить, что задана 2-форма $Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$ и

$$\int\int_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy := \int\int_S (\vec{A}, \vec{\nu}) dS$$

Из определения поверхностного интеграла следует

$$\int\int_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \int\int_D \left(P(...)\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q(...)\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R(...)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right) dudv.$$

Как и для криволинейных интегралов, поверхностный интеграл по ориентированным кусочно гладким поверхностям

$$\int\int_{S^+} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy, \qquad \int\int_S (\vec{A}, \vec{\nu}) dS$$

определяется как сумма интегралов по отдельным гладким частям.

Лекция 9 (8 июня 2015)

На прошлой лекции мы ввели кусочно гладкие ориентированные и неориентированные поверхности и поверхностные интегралы 1-го и 2-го рода.

Интегралы 1-го рода определяли площадь поверхности, они были по кусочно гладким неориентированным поверхностям. Эти интегралы были от скалярных функций (физически — поверхностная плотность, например).

Интегралы 2-го рода были по ориентированным кусочно гладким поверхностям. Это были интегралы от вектор функций, ну или от 2-форм. Они определялись через интегралы 1го рода, была куча обозначений для интеграла 2-го рода. Все они были связаны с гладкой параметризацией поверхности (и аддитивностью по поверхности). Интегралы первого рода задавались формулами

$$\iint_S F(x,y,z)\,dS := \iint_D F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))|\vec{r}_u'\times\vec{r}_v'|\,dudv = \iint_D F(x,y,z)\sqrt{EG-F^2}\,dudv,$$

второго рода — формулами

$$\iint_{S^\nu}(\vec{A},\vec{\nu})dS = \iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \\ \iint_D \left(P(...)\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q(...)\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R(...)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)dudv.$$

Интеграл 2-го рода ещё называется потоком через ориентированную поверхность в направлении нормали.

Самые простые случаи параметризации двумерных поверхностей: одна переменная есть функция двух других. Поток от простейшего векторного поля через такие поверхности приводит к самому простому определению.

Явный почти гладкий кусок поверхности: $S = \{(x,y,f(x,y)) : (x,y)\in D\}$, где D — ограниченная плоская область, ∂D — кусочно гладкий контур, f непрерывна на $\bar{D}$ и C^1 на D.

Потоком непрерывного поля $\vec{A} = R(x,y,z)\vec{k}$ через явный почти гладкий кусок поверхности S в направлении нормали $-f_x'\vec{i} - f_y'\vec{j} + \vec{k}$ называется интеграл

$$\iint_{S^+} Rdxdy = \iint_D R(x,y,f(x,y))\,dxdy.$$

Аналогично определяются потоки для полей $P\vec{i}$ и $Q\vec{j}$ для явный почти гладких кусков поверхностей $x = g(y,z)$ и $y = h(z,x)$.

Ещё раз вернёмся ко всяким знакомым вам определениям. Бывают не только векторные поля — это мы знаем, что такое, но и скалярные поля. Напоминаю: оператор Гамильтона, он же набла. Градиент скалярного поля — это векторное поле $\operatorname{grad} u = \nabla u$.

Пусть задано векторное поле $\vec{A} : G \to \mathbb{R}^3$. Производная по направлению $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{e}} := \frac{d}{dt}\vec{A}(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma)\Big|_{t=0},$$

если производная обычной функции в правой части существует. По правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}\cos\gamma = (\vec{e}, \nabla)\vec{A}.$$

Если $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ — произвольный фиксированный вектор, то вектор

$$(\vec{b}, \nabla)\vec{A} := \frac{\partial \vec{A}}{\partial x}b_x + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}b_y + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}b_z$$

называется *градиентом вектора* $\vec{A}$ *по вектору* $\vec{b}$.

Число

$$\operatorname{div}\vec{A} := (\nabla, \vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

построенное по векторному полю $\vec{A}$, называется дивергенцией поля $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$.

Формулы–определения: $\boxed{\operatorname{grad} f = \nabla f, \qquad \operatorname{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A}, \qquad \operatorname{div}\vec{A} = (\nabla, \vec{A}).}$

Примеры простого вычисления:

$$\operatorname{rot}(f\vec{A}) = \nabla \times (f\vec{A}) = \nabla f \times \vec{A} + f(\nabla \times \vec{A}) = \operatorname{grad} f \times \vec{A} + f\operatorname{rot}\vec{A}.$$

Ещё формулы:

$$\operatorname{div}(f\vec{A}) = (\vec{A}, \operatorname{grad} f) + f\operatorname{div}\vec{A},$$

$$\operatorname{grad}(\vec{A}, \vec{B}) = \nabla(\vec{A}, \vec{B}) = (\vec{B}, \nabla)\vec{A} + (\vec{A}, \nabla)\vec{B} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}),$$

$$\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla, \vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B}, \nabla \times \vec{A}) - (\vec{A}, \nabla \times \vec{B}),$$

Всегда $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = 0$, $\Delta = (\nabla, \nabla)$ — это формула для оператора Лапласа.

Формула Гаусса-Остроградского Пусть на замыкании $\bar{G}$ области G задано C^1 гладкое векторное поле $\vec{A} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$.

Область в $\mathbb{R}^3$ вида

$$G = \{(x, y, z) : \varphi(x, y) < z < \psi(x, y), (x, y) \in D\}$$

назовем простой относительно оси Oz. Здесь D — ограниченная плоская область, ∂D — кусочно гладкий контур, функции φ и ψ непрерывны на $\bar{D}$ и непрерывно дифференцируемы на D.

Аналогично определим области, простые относительно других осей.

Граница простой относительно оси Oz области G состоит из 3х частей: нижней S_1, верхней S_2 и боковой S_3.

Будем называть область G допустимой, если её можно представить разбить в виде объединения конечного числа областей, простых относительно оси Oz, отдельно — в виде объединения конечного числа областей, простых относительно оси Oy и в виде объединения конечного числа областей, простых относительно оси Ox.

Самый простой случай — выпуклая область в $\mathbb{R}^3$.

Когда-то при доказательстве формулы Грина мы доказывали, что ФГ справедлива для областей, простых относительно каждой из 2х осей, а потом доказывали, что область с кусочно гладкой границей всегда можно разрезать на простые области.

Здесь мы не доказываем, что каждая область, ограниченная кусочно гладкой поверхностью, является допустимой. Это можно доказать, я это делать не буду.

Теорема Гаусса-Остроградского. *Пусть область G с кусочно гладкой границей допустима, векторное поле C^1, нормаль внешняя. Тогда*

$$\iiint_G \operatorname{div} \vec{A}\, dxdydz = \iint_{\partial G} (\vec{A}, \vec{n})\, dS.$$

Доказательство состоит из 3х шагов:

Шаг 1. Доказательство достаточно провести для случая поля $\vec{A} = (0, 0, R\vec{k})$, для остальных компонент — аналогично.

Шаг 2. Доказательство достаточно провести для одной простой относительно оси Oz области. Потом сложим, интегралы по внутренним кускам поверхностей разреза сократятся.

Шаг 3. Пусть G имеет вид

$$G = \{(x, y, z) : \varphi(x, y) < z < \psi(x, y), (x, y) \in D\}.$$

Для такой области

$$\iiint_G \operatorname{div} \vec{A}\, dxdydz = \iiint_G \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz = \iint_D \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz \right) dxdy =$$

$$= \iint_D R(x, y, z)) \Big|_{z=\varphi(x,y)}^{z=\psi(x,y)} dxdy = \iint_D R(x, y, \psi(x, y))\, dxdy - \iint_D R(x, y, \varphi(x, y))\, dxdy =$$

$$= \iint_{S_2^+} R\, dxdy - \iint_{S_1^-} R\, dxdy = \iint_{S_2^+} R\, dxdy + \iint_{S_1^+} R\, dxdy + \iint_{S_0} R\, dxdy = \iint_S R\, dxdy.$$

На боковым поверхностях нормаль перпендикулярна полю, поэтому интегралы 0. $\square$

Замечание. Мы использовали только непрерывность слагаемых дивергенции, а не C^1.

Следствие. Пусть векторное поле $\vec{A}$ непрерывно вместе с компонентами дивергенции P'_x, Q'_y, R'_z в некоторой окрестности точки M. Пусть B_ε — шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке M, ∂B_ε — его граница (сфера), ориентированная внешней нормалью.

В силу доказанной формулы Гаусса–Остроградского

$$\iiint_{B_\varepsilon} \operatorname{div} \vec{A}\, dxdydz = \iint_{\partial B_\varepsilon} (\vec{A}, \vec{n})\, dS,$$

в силу теоремы о среднем в некоторой точке $M_\varepsilon \in B_\varepsilon$

$$\operatorname{div} \vec{A}(M_\varepsilon) = \frac{1}{\mu(B_\varepsilon)} \iint_{\partial B_\varepsilon} (\vec{A}, \vec{n})\, dS.$$

Теперь

$$\operatorname{div} \vec{A}(M) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\mu(B_\varepsilon)} \iint_{\partial B_\varepsilon} (\vec{A}, \vec{n})\, dS.$$

Эта формула определяет дивергенцию без выбора прямоугольной системы координат, это называется геометрическое определение дивергенции.

Определение. Векторное поле $\vec{A}$ называется *соленоидальным* в D, если $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ в D.

В силу теоремы Гаусса-Остроградского: соленоидальность поля эквивалентна равенству нулю потока в направлении нормали через границу любой допустимой области.

Объём тела. После формулы Грина были сформулированы формулы для вычисления площади области по криволинейному интегралу по границе этой области.

Аналогично, при $D \subset \mathbb{R}^3$

$$V(D) = \int_{\partial D^+} z\, dxdy.$$

Это следует из Формулы Гаусса–Остроградского, однако это же легко понять из картинки: объём подграфика функции $z = z(x, y)$ равен интегралу справа, интегралы по вертикальным поверхностям равны нулю, интеграл по $z = 0$ равен нулю.

Формула Стокса

Пусть поверхность

$$S = \{\vec{r}(u, v) : (u, v) \in \bar{D}\} \subset G \subset \mathbb{R}^3$$

($\vec{r} \in C^2$, G — область в $\mathbb{R}^3$, D — плоская ограниченная область с границей $\partial D = \{(u(t), v(t)) : t \in [a, b]\}$, представляющая собой простой кусочно гладкий контур) имеет край $\partial S = \Gamma = \vec{r}(u(t), v(t) : t \in [a, b])$. При этом говорят, что контур ∂S ограничивает поверхность S, ещё говорят, что поверхность S натянута на контур ∂S.

Будем считать, что контур $\partial D \in \mathbb{R}^2$ ориентирован положительно. Пусть

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

— ориентация поверхности S, при этом ориентации на S и на ∂S оказываются согласованными (по правилу штопора).

Теорема Стокса. *Пусть на G задано C^1 векторное поле $\vec{A} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ и поверхность $S \subset G$. Тогда, если ориентации согласованы, то*

$$\iint_S (\operatorname{rot}\vec{A}, \vec{n})\, dS = \int_{\partial S} (\vec{A}, d\vec{r}).$$

Словесный перефраз формулы Стокса: поток вихря через поверхность равен циркуляции по краю поверхности.

В координатной форме формула Стокса имеет вид

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS = \int_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz.$$

(это интеграл первого рода) Или, через интеграл второго рода,

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy =$$
$$\int_{\partial S} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Доказательство. Как обычно, рассмотрим лишь случай поля $\vec{A} = P\vec{i}$

$$\int_{\partial S} P(x,y,z)\, dx = \int_\Gamma P(x,y,z)[x'_u u'_t + x'_v v'_t]\, dt = \int_{\partial D} P(x,y,z)x'_u du + P(x,y,z)x'_v dv$$

Применим к последнему интегралу формулу Грина $\int_\Gamma K du + M dv = \iint_D (M'_u - K'_v) dudv$:

$$\int_{\partial S} P(x,y,z)\, dx = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right] dudv =$$
$$= \iint_D [P'_u x'_v + P x''_{uv} - P'_v x'_u - P x''_{uv}]\, dudv = \iint_D [P'_u x'_v - P'_v x'_u]\, dudv =$$
$$= \iint_D \left[P'_x x'_u x'_v + P'_y y'_u x'_v + P'_z z'_u x'_v - P'_x x'_v x'_u - P'_y y'_v x'_u - P'_z z'_v x'_u\right] dudv$$
$$= \iint_D \left[P'_z \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} - P'_y \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right] dudv = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

Остальные равенства (про Q и R) аналогичны. $\square$

Замечание 1. Формула Стокса справедлива и для более общей ситуации, требование непрерывности вторых производных можно снять.

Замечание 2. Формула Стокса аддитивна по множеству, поэтому справедлива в более общей ситуации, можно рассматривать поток через ориентированную кусочно гладкую поверхность.

Замечание 3. Формула Стокса может быть использована для геометрического (бескоординатного) определения $\operatorname{rot}\vec{A}$.

Пусть $\vec{A}$ — гладкое C^1 векторное поле в окрестности точки $M = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{e}$ — единичный вектор, D_ε — круг радиуса $\varepsilon > 0$ в плоскости, ортогональной $\vec{e}$. Тогда по формуле Стокса и теореме о среднем

$$\int_{\partial D_\varepsilon} (\vec{A}, d\vec{r}) = \int\int_{D_\varepsilon} (\operatorname{rot}\vec{A}, \vec{e})\, dS = (\operatorname{rot}\vec{A}, \vec{e})\Big|_{(x,y,z)=(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)} \mu(D_\varepsilon),$$

где ориентация окружности D_ε согласована с $\vec{e}$ по правилу штопора, $(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon) \in D_\varepsilon$. Поэтому

$$(\operatorname{rot}\vec{A}, \vec{e})\Big|_{(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)} = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{\mu(D_\varepsilon)} \int_{\partial D_\varepsilon} (\vec{A}, d\vec{r}).$$

Поскольку криволинейный интеграл второго рода не зависит от сдвига и поворота декартовой системы координат, то и $(\operatorname{rot}\vec{A}, \vec{e})$ не зависит.

Литература.

1. Никольский С.М. Курс математического анализа, том II. М.: Наука, 1983, 448 стр.

2. Бесов О.В. Лекции по математическому анализу, Москва, 2010, 559 стр. (Лекции студентам физтеха, есть в сети)

3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, Наука, 1976, 543 стр.

4. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу, М., Мир, 1979.

5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том III, Наука, 1966, 656 стр.

6. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, том 2 из 3. Наука, 1981, 584 стр.

7. Зорич В.А. Математический анализ. Часть II. М., МЦНМО, 2002 (Изд. 4е), 787 стр.