Дискретная математика
Семинар 19

ВШЭ, факультет математики
первый курс, четвёртый модуль

Пусть $X : \Omega \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ - случайная величина, принимающая значение в целых неотрицательных числах. Производящей функцией случайной величины X называется ряд

$$G_X(z) = \sum_{k\geq 0} P(\omega \in \Omega : \ X(\omega) = k) z^k.$$

Случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами n, p ($n \in \mathbb{N}$, $0 \leq p \leq 1$), если $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
Случайная величина X имеет равномерное распределение, если $P(X = k) = \frac{1}{n}$, $k = 1, \ldots, n$.

1. Вычислите производящую функцию случайных величин с биномиальным и равномерным распределением.

2. Пусть X, Y – независимые случайные величины. Выразите ПФСВ G_{X+Y} через G_X и G_Y.

3. Пусть $G_X(z)$ и $G_Y(z)$ – производящие функции случайных величин и пусть $G_Z(z) = pG_X(z) + qG_Y(z)$, где $p + q = 1$. Выразите математическое ожидание и дисперсию Z через p, q и математическое ожидание и дисперсию X и Y.

Ковариацией двух случайных величин X и Y называется $(X, Y) = E((X - EX)(Y - EY))$.

4. Докажите, что если X, Y независимы, то $(X, Y) = 0$. Приведите пример двух непостоянных случайных величин, таких что их ковариация равна нулю, но они не независимы.

5. n конвертов с разными адресами и вложенными в них письмами рассыпали на полу. Все письма вылетели из конвертов. Случайным образом письма раскладываются по конвертам. Найти вероятность того, что ни одно письмо не попало в свой конверт.

6. Монета подбрасывается бесконечное число раз. Доказать, что любая заданная последовательность длины n встретится с вероятностью 1.

7. Вероятность того, что в справочное бюро в течение часа обратятся k человек равна $e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. Вероятность для каждого позвонившего, что он не получит ответ на свой вопрос, равна p. Найдите вероятность того, что ровно s обратившихся не получат ответы на свои вопросы.