Листок 1 (”пёстрый”)

1. Пусть внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ существует такая точка M, что треугольники AMB и CMD равнобедренные с углами $2\pi/3$ при общей вершине M. Докажите, что на плоскости найдется такая точка N, что треугольники BNC и DNA равносторонние.

2. Пусть A, B, C – произвольные точки плоскости. Доказать, что $(s_A \circ s_B \circ s_C)^2 = id$. Верно ли это утверждение в пространстве?

3. а) На сторонах правильного треугольника вне его построены квадраты. Доказать, что их центры образуют правильный треугольник.

б) На сторонах квадрата вне его построены правильные треугольники. Докажите, что их центры лежат в вершинах квадрата.

4. Точки A и B лежат в разных полупространствах относительно плоскости П. Найдите на плоскости такую точку M, для которой модуль разности $\big||AM| - |BM|\big|$ максимален.

5. Опишите группу движений, сохраняющих конфигурацию,состоящую из двух плоскостей: $x - y + z + 1 = 0; 2x - y - z + 2 = 0$. Найдите уравнения зеркал всех отражений, входящих в эту группу. Порождается ли эта группа отражениями?

6. Докажите, что прямые, проведенные через середины сторон вписанного четырехугольника перпендикулярно противолежащим сторонам, пересекаются в одной точке.

7. На диаметре AB окружности взята точка M. Хорда CD проходит через M под углом $45°$ к прямой AB. Докажите, что $|CM|^2 + |DM|^2$ не зависит от выбора точки M.

8. На катетах a и b прямоугольного треугольника выбираются точки P и Q, из которых опускаются перпендикуляры PK и QH на гипотенузу. Найдите наименьшее значение суммы $|KP| + |PQ| + |QH|$.

9. Можно ли вписать параллелограмм в ”параболу” $y = x^2$?

10. Доказать сферическую теорему Пифагора: если a, b и c – два катета и гипотенуза сферического прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = \pi/2$), то $\cos c = \cos a \cdot \cos b$.

11. Средняя линия сферического треугольника:

а) больше половины оставшейся стороны;

б) меньше половины;

в) равна половине.

Нужное подчеркнуть и доказать.

12**. Китайская задача (XX век). Внутри n-мерного симплекса Δ в E^n выбрана точка P.Пусть $P_0, \ldots, P_n$ – проекции точки P на гиперграни симплекса Δ. Через Δ_p обозначим симплекс с вершинами $P_0, \ldots, P_n$. Доказать, что $\mathrm{vol}\Delta_p \leq \frac{1}{n^n}\mathrm{vol}\Delta$.