

Семинар 3

Скалярное произведение

1. Доказать, что если плоские углы четырехгранного угла равны, то плоскости его диагональных сечений перпендикулярны.
2. Какое максимальное число векторов, попарно образующих неострые углы, можно нарисовать на плоскости?

Линейно независимые векторы и ортогональные семейства

3. Пусть (e_1, e_2, \dots, e_k) – линейно независимое семейство векторов. Если вектор $f = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_k e_k$, то коэффициенты такого разложения определены однозначно.
4. Доказать, что семейство ненулевых попарно ортогональных векторов линейно независимо.

Окружности, прямые, пучки

5. Две окружности C_1 : $x^2 + y^2 + f_1x + g_1y + h_1 = 0$ (где центр этой окружности?) и C_2 : $x^2 + y^2 + f_2x + g_2y + h_2 = 0$ тогда и только тогда пересекаются под прямым углом, когда $f_1f_2 + g_1g_2 = 2(h_1 + h_2)$.
6. Найти точку пересечения высот в треугольнике, который задан уравнениями своих сторон: $x - 3y = 1$, $x + y = 10$, $3x + 7y = 2$.
7. Найти уравнение:
 - а) окружности, проходящей через точку $(1, 2)$ и точки пересечения окружностей $x^2 + y^2 - 3x + 4y - 1 = 0$, $x^2 + y^2 + 5/2x - 3y + 3/2 = 0$;
 - б) прямой, проходящей через точки пересечения этих двух окружностей.

Стандартная аналитическая геометрия

8. Найти проекцию точки $(1, 1, 1)$ на
 - а) прямую, проходящую через точки $(1, 2, 3)$, $(3, 4, 5)$;
 - б) плоскость, проходящую через точки $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(2, 3, 4)$.

9. Докажите, что прямые l_1 : $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$ и l_2 : $\begin{cases} x = t, \\ y = -1 - t, \\ z = 3t. \end{cases}$ скрещиваются.

Найдите уравнение их общего перпендикуляра.

10. Напишите уравнение поверхности, полученной вращением прямой, проходящей через точки $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, вокруг оси OZ .