Механика и теория поля 2015.

Листок 1. Принцип наименьшего действия и законы сохранения

0. Вдоль некоторой хорды Земного шара просверлен узкий сквозной туннель. В него помещается массивный шарик, который может двигаться в туннеле без трения.

а) Напишите урвнение движения и определите закон движения шарика. Найдите период колебаний шарика в туннеле (считайте, что Земля – однородный шар массы $6 \cdot 10^{24}$ кг и радиуса 6400 км, константа гравитационного взаимодействия $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг$\cdot$ с^2)).

б) Составьте лагранжиан этой механической системы.

1. Найдите уравнения движения и определите траектории движения для лагранжианов

а) $L(x, \dot{x}) = e^{-x^2 - \dot{x}^2} + 2\dot{x}e^{-x^2} \displaystyle\int_0^{\dot{x}} e^{-y^2} dy$;

б) $L(x, \dot{x}, t) = \dfrac{1}{2} e^{\alpha t}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)$.

2. **Регулятор Уатта** (*Джеймс Уатт, 1788*) состоит из четырех одинаковых стержней OA, OB, AC и BC длины ℓ, двух грузов A и B, имеющих массу m каждый, и муфты C массы M, которая может скользить вдоль вертикальной оси Oz, проходящей через неподвижную точку O (см. рис.1). Вся система может вращаться вокруг оси Oz. Масса стержней и трение пренебрежимо малы.

а) Выбрав подходящий набор обобщенных координат, постройте действие этой механической системы.

б) Определите выполняющиеся в ней законы сохранения.

3. **Сферический маятник.** Частица под действием гравитации движется без трения по внутренней поверхности сферы.

а) Постройте лагранжиан, используя в качестве обобщенных координат сферические углы θ и φ. Определите законы сохранения.

б) Найдите уравнение движения для θ. Определите стационарные по θ режимы движения.

4. Решите **задачу Кеплера** (*Иоганнн Кеплер, 1571-1630*) о движении двух тел, потенциал взаимодействия которых зависит только от расстояния r между ними: $U(r) \sim -1/r$. При решении обратите внимание на симметрии задачи и на применение соответствующих законов сохранения.

а) Отделите движение центра масс и примените закон сохранения импульса.

б) Сформулируйте закон сохранения момента импульса как следствие симметрии задачи относительно вращений в 3-мерном пространстве. Перейдите к рассмотрению движения в плоскости, использовав постоянство направления вектора момента импульса.

в) Определите сохраняющуюся величину момента импульса (второй закон Кеплера). Используйте этот закон для редукции проблемы к задаче с одной (радиальной) степенью свободы.

г) Сформулируйте закон сохранения энергии и определите форму траекторий движения тел (первый закон Кеплера).

5. Материальная точка массы m движется в однородном силовом поле по прямой: $L(x,\dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + gx$. Определите закон сохранения, отвечающий преобразованию симметрии $\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = x + \epsilon$.

6. Задача о брахистохроне (*Иоганн Бернулли, 1696*). Материальная точка, начальная скорость которой равна 0, движется без трения в вертикальной плоскости под действием силы тяжести по некоторой кривой, соединяющей две заданные точки, начальную и конечную. Задача состоит в том, чтобы найти такую кривую, называемую брахистохроной, движение по которой из начальной точки в конечную занимает наименьшее время. Пользуясь вариационным принципом, составьте дифференциальное уравнение брахистохроны. Определите форму брахистохроны, используя аналог закона сохранения энергии при интегрировании дифференциального уравнения.

7. На римановой поверхности с координатами q^i и метрикой $g_{ij}(q)$ уравнения геодезических можно получить как уравнения движения свободной материальной точки с кинетической энергией $T = \sum_{i,j} g_{ij}(q)\,\dot{q}^i\dot{q}^j$. В то же время геодезические - кратчайшие линии между точками поверхности, а функционал длины кривой, соединяющей точки $A = \{q^i(a)\}$ и $B = \{q^i(b)\}$ имеет вид

$$S[q^i(t)] \;=\; \int_a^b \sqrt{\textstyle\sum_{i,j} g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j}\,dt\,.$$

Выпишите уравнения геодезических и убедитесь, что их решения являются экстремалями функционала S.

8. Однородная балка переменной толщины (по вертикали) и постоянной ширины (по горизонтали) одним концом горизонтально вмонтирована в стену. Другой ее конец не закреплен. Потенциальная энергия упругой деформации балки (в главном приближении) имеет вид

$$U_{\text{упр}} \sim \int_0^L dx (y''(x))^2 (H(x))^3,$$

где L – длина балки, а функции $H(x)$ и $y(x)$ задают, соответственно, толщину балки и отклонение ее средней линии вниз от горизонтали (см. рис.2). В состоянии равновесия потенциальная энергия балки минимальна. Найдите дифференциальное уравнение и граничные условия, характеризующие прогиб балки $y(x)$ при заданном профиле $H(x)$. Определите явный вид $y(x)$ для балки трапециевидного профиля

$$H(x) = H_0\Big(1 - \Delta\frac{x}{L}\Big), \quad \text{где } 0 \le \Delta \le 1.$$

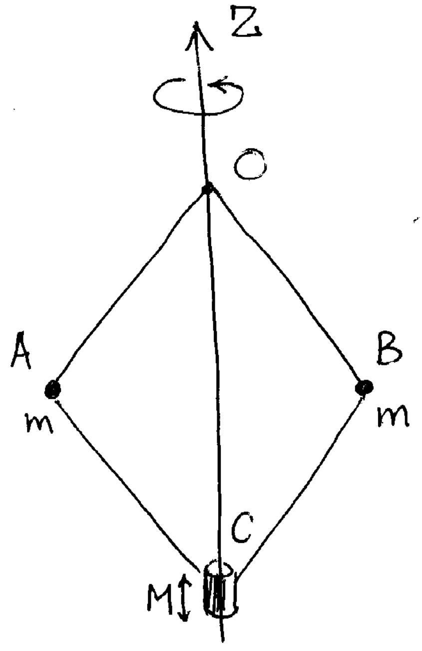

Рис. 1.

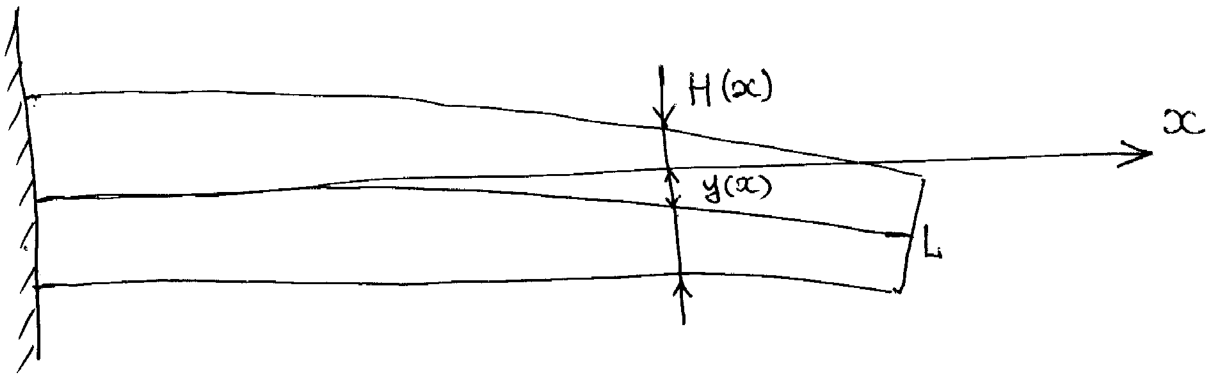

Рис. 2.