

Листок 2. Движения пространства и векторное произведение.

Werde der du bist¹. J. W. Goethe

1. Найдите все а) повороты, б) осевые симметрии, в) движения, переводящие в себя множество вершин квадрата на плоскости.
2. То же для правильного треугольника на плоскости.
3. а) Найдите все параллельные переносы пространства, переводящие данный куб в себя.
б) То же для центральных симметрий.
в) То же для зеркальных симметрий.
г) То же для осевых симметрий.

Вращением пространства вокруг ориентированной прямой l на угол α называется отображение R_l^α пространства, которое каждую точку прямой l оставляет на месте и каждой точке X пространства, не лежащей на прямой l , ставит в соответствие точку X' , определяемую так: берем проекцию O точки X на l , проводим плоскость XOX' ортогонально прямой l , так что $OX = OX'$ и угол XOX' в этой плоскости равен α (положительное направление отсчета углов в плоскости XOX' согласовано с ориентацией пространства и прямой l по правилу буравчика). *Поворотной симметрией* пространства называется композиция вращения и зеркальной симметрии относительно плоскости, перпендикулярной оси вращения (или, эквивалентно, композиция вращения и центральной симметрии относительно точки, лежащей на оси вращения).

4. а) Ось любого вращения пространства, переводящего данный куб в себя, проходит либо через вершину, либо через середину ребра, либо через центр грани.
б) Найдите все вращения пространства, переводящие данный куб в себя.
в) То же для поворотных симметрий.
г) То же для движений.

Для каждого типа движений нарисуйте куб и движение (приветствуются красивые цветные рисунки), укажите перестановку вершин куба, реализуемую этим движением, и число движений такого типа.

5. То же для правильного тетраэдра.
6. Постройте биекцию, сохраняющую композицию, между найденным в задачах 1, 2, 4б, 4г, 5 множеством движений и некоторым подмножеством группы перестановок n -elementного множества (с минимально возможным числом n).

¹Стань самим собой. — Пер. с нем.

7. Сторона AB четырехугольника $ABCD$ разделена точками P и Q на три равные части: $AP = PQ = QB$. Сторона CD также разделена точками R и S на три равные части: $CR = RS = SD$. Докажите, что площадь четырехугольника $PSRQ$ составляет одну треть площади четырехугольника $ABCD$.

8. Докажите:

- a) тождество 'бац минус цаб': $[\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A}, \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}, \vec{B})$;
- б) тождество Якоби: $[\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]] + [\vec{B}, [\vec{C}, \vec{A}]] + [\vec{C}, [\vec{A}, \vec{B}]] = 0$.

9. Под углом между прямыми a и b в евклидовом пространстве E^3 понимается угол между прямой a и любой прямой b' , параллельной прямой b и пересекающей прямую a . Даны прямые a и b в E^3 , угол между которыми – прямой, и пусть S_a и S_b – осевые симметрии с осями a и b соответственно. Найдите геометрическое место (то есть множество) середин отрезков $[X, Y]$, где X – произвольная точка пространства, а $Y = (S_b \circ S_a)(X)$.

Последующие задачи посвящены доказательству следующей непростой теоремы:

Теорема Хъемслева–Морли. Пусть a , b и c – три попарно непараллельные прямые в пространстве. Обозначим через a' общий перпендикуляр к паре прямых b и c . Далее, обозначим через a'' общий перпендикуляр к паре прямых a и a' (дано, что эти прямые непараллельны). Аналогично определим прямые b'' и c'' . Тогда a'', b'', c'' имеют один общий перпендикуляр (т.е. прямую, пересекающую их все и перпендикулярную им всем).

10. а) Докажите эту теорему в случае, когда a , b , c лежат в одной плоскости.

б) То же для случая, когда a , b , c проходят через одну точку.

в) Докажите, что a'' , b'' и c'' параллельны одной плоскости (для любых a , b , c).

Прямую в пространстве можно задать следующим уравнением:

$$[u, x] = v.$$

Здесь u и v – фиксированные перпендикулярные друг другу векторы, а x – радиус-вектор переменной точки. Векторы u и v можно построить по данной прямой так: взять две точки A и B на этой прямой и положить $u = AB$, $v = [OA, OB]$.

Пусть $(u; v)$ и $(u'; v')$ – две пары векторов. Назовем их *произведением* пару $(u''; v'')$, где $u'' = [u, u']$ и $v'' = [u, v'] + [v, u']$. Определим *сумму* пар векторов покомпонентно: $(u; v) + (u'; v') = (u+u'; v+v')$. Паре $(u; v)$ поставим в соответствие прямую $[u, x] = pr v$, где $pr v$ – проекция вектора v на плоскость, перпендикулярную вектору u .

11. а) Прямые $[u, x] = v$ и $[u', x] = v'$ пересекаются (или параллельны), если и только если $(u, v') + (v, u') = 0$.

б) Наше соответствие переводит произведение в общий перпендикуляр.

в) Произведение пар векторов удовлетворяет тождеству Якоби.

12. Докажите теорему Хъемслева–Морли.