

# Механика и теория поля 2015.

## Листок 2. Релятивистская механика

1. Тележка катится по столу с постоянной скоростью  $v$ . По тележке в том же направлении катится вторая тележка со скоростью  $v$  относительно первой. По второй тележке катится третья с той же скоростью  $v$  относительно второй, и так далее. Определите скорость  $n$ -й тележки относительно стола.

2. Выведите релятивистский закон преобразования скоростей и ускорений при переходе в равномерно движущуюся (скажем, вдоль оси  $Ox$ ) со скоростью  $v$  систему отсчета.

3. Зеркало движется перпендикулярно своей плоскости с постоянной скоростью  $v$  относительно источника света. Какой угол с плоскостью зеркала образует отраженный луч света, если падающий луч направлен под углом  $\theta$  к нормали зеркала? Углы измеряются в системе покоя источника света.

4. Линейный базис в алгебре Ли группы Лоренца задается шестью инфинитезимальными поворотами  $L^{\mu\nu}$ ,  $0 \leq \mu < \nu \leq 3$ , затрагивающими по две из четырех координат пространства Минковского:  $x^\mu$  и  $x^\nu$ . Постройте матрицы  $L^{\mu\nu}$  и выразите коммутаторы  $[L^{\mu\nu}, L^{\rho\sigma}]$  в виде линейных комбинаций матриц  $L$ .

Алгебра Ли группы Пуанкаре вдобавок к  $L^{\mu\nu}$  имеет еще четыре базисных элемента  $P^\mu$ ,  $0 \leq \mu \leq 3$ , отвечающих трансляциям вдоль координатных осей  $x^\mu$ . Найдите коммутаторы элементов  $L^{\mu\nu}$  и  $P^\rho$ .

5. **Явление комптоновского рассеяния.** Фотон частоты  $\nu$  налетает на покоящийся электрон массы  $m$  и после столкновения движется под углом  $\theta$  к направлению своего исходного импульса. Покажите, что частота  $\nu'$  рассеянного фотона выражается формулой:

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{mc^2}(1 - \cos \theta),$$

где  $c$  – скорость света, а  $h$  – постоянная Планка, которая связывает энергию фотона  $E$  с его частотой квантовомеханической формулой  $E = h\nu$ .

6. Покоящийся нейтрон претерпевает, так называемый,  $\beta$ -распад, одним из продуктов которого является электрон. В системе покоя нейтрона направления вылета электрона равновероятны, а модуль скорости электрона равен  $v$ . В эксперименте наблюдают  $\beta$ -распад нейтрона, который движется относительно лаборатории со скоростью  $u$ . Какие значения вектора импульса  $\vec{p}$  испущенного нейтроном электрона можно зарегистрировать в лаборатории? Имеются в виду модуль  $|\vec{p}|$  и угол  $\theta$  относительно направления полета нейтрона.

7. Какую кинетическую энергию необходимо придать двум протонам, чтобы стала возможной реакция рождения антипротона:  $p + p \rightarrow 3p + \bar{p}$ ? Решите задачу в двух случаях:

а) один из взаимодействующих протонов является мишенью, т.е., он неподвижен перед столкновением;

б) реагируют встречные пучки протонов, т.е., протоны налетают друг на друга со скоростями одинаковыми по величине и противоположными по направлению.

8. Проведите сравнительный анализ трех динамических систем, задаваемых функционалами действия

$$\text{а) } S[\vec{x}(t)] = -mc^2 \int \sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2} dt, \quad \text{б) } S[x^\mu(\tau)] = -mc \int \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau}} d\tau,$$

$$\text{в) } S[x^\mu(\tau), e(\tau)] = \int \left( \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau} / e + T e \right) d\tau,$$

где  $m$ ,  $c$  и  $T$  – константы;  $\vec{x}$ ,  $x^\mu$ ,  $e$  – динамические переменные;  $t$  – реальное время ( $x^0 = ct$ );  $\tau$  – формальный параметр вдоль мировой линии частицы  $x^\mu(\tau)$ .

Сравните уравнения движения и законы сохранения в этих моделях.