Лекция 1

Введение. Лагранжев формализм. Теорема Нётер

§1. Напоминания.

В физике нас интересуют величины, которые можно измерить — наблюдаемые. Задача теоретической физики — строить математические модели физических явлений и вычислять в них наблюдаемые.

Наблюдаемые бывают 2-х типов:

1-й тип: масса частицы (материальной точки), моменты инерции твердого тела, заряд частицы, ... Эти наблюдаемые характеризуют модель, они принимают одни и те же значения во всех состояниях данной модели. Это параметры модели

2-й тип: координата, скорость или импульс частицы; угловая скорость, момент импульса волчка; энергия... Эти наблюдаемые различают разные состояния данной модели, характеризуют ее эволюцию во времени.

Это наблюдаемые в узком смысле термина. Их мы и будем изучать.

Среди них есть минимальные наборы, которые полностью характеризуют состояние модели. Например, координата и скорость для модели материальной точки.

Это — координаты на *фазовом пространстве* модели. Точки фазового пространства — состояния модели.

Остальные наблюдаемые — функции от координат, т.е., *функции на фазовом пространстве*.

Среди всех наблюдаемых есть особое семейство тех, которые не меняются с течением времени. Это *интегралы движения* или *законы сохранения*. Они нас интересуют в первую очередь. Фазовое пространство расслаивается на линии уровня интегралов движения, и эволюция модели происходит вдоль этих линий.

Сама эволюция в механике описывается дифференциальными уравнениями. Фазовое пространство — пространство начальных данных для этих уравнений.

Есть 3 рецепта (формализма) для написания эволюционных уравнений.

Рецепт 1 Ньютонова механика

Определяются все силы, действующие в модели и пишутся уравнения Ньютона. Например, для материальной точки массы m:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}$$

Здесь $\vec{r}(t)$ – радиус-вектор координат точки, $\vec{F}_{\alpha}$ – действующие на неё силы. Силы бывают всякие:

- гравитационная
- кулоновская (электростатическая)
- лоренцева (магнитная)
- трения
- упругости
- силы реакции связей (не известны заранее)

...

Особенность формализма: уравнения Ньютона надо писать в инерциальной системе отсчёта (если только не вводить сил инерции) и в декартовых координатах. Уравнения Ньютона меняют свой вид при произвольных заменах координат.

Рецепт 2: Лагранжева механика

Определяется лагранжиан модели $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ и пишутся уравнения Лагранжа (см. ниже)

Особенности формализма:

1) Формализм лаконичен: вся информация о системе содержится в одной функции — лагранжиане L:

В нерелятивистской механике

$$\boxed{L = T - U}$$

$$T = \sum_a m_a \frac{\dot{\vec{r}}_a^{\,2}}{2}$$ (для системы материальных точек $\vec{r}_a(t)$)

Это кинетическая энергия системы. В ней содержится информация о возможных движениях (кинематике) системы.

$U = U(\vec{r}_a)$ — потенциальная энергия системы. Содержит информацию о действующих в системе силах. Но силы уже не произвольны. Потенциальную энергию можно написать лишь для потенциальных (консервативных) сил:

$$\vec{F}_a = -\vec{\nabla}_{(\vec{r}_a)} U = -\left(\frac{\partial}{\partial x_a}, \frac{\partial}{\partial y_a}, \frac{\partial}{\partial z_a}\right) U(\vec{r}_a) \;-$$

сила, действующая на материальную точку $\vec{r}_a(t)$.

Потенциальные силы: гравитация; сила Кулона; при некотором обобщении — электромагнитные силы; сила в модели гармонического осциллятора (сила Гука).

Не потенциальные: силы трения, силы пластических (необратимых) деформаций ...

Итак: лагранжев формализм годится лишь для описания моделей с потенциальными силами — а это все фундаментальные модели теор. физики.

2) Как следствие лаконичности, лагранжев формализм позволяет сформулировать универсальный принцип построения динамических уравнений: принцип наименьшего действия.

Этот принцип:

- работает независимо от выбора системы координат (не обязательно декартовых)
- позволяет сформулировать универсальный метод поиска интегралов движения системы — теорему Э. Нётер.

Есть еще рецепт 3: Гамильтонова механика

Она тесно связана с лагранжевой. О ней расскажем позднее. А сейчас обсудим детали лагранжевой механики.

§2 Лагранжев формализм

* Координаты на фазовом пространстве:

$$\{q_i, \dot q_i\}_{i=1,\dots,n} \text{ — "обобщенные" координаты и скорости.}$$

Обобщенные — значит не обязательно декартовы.

* Лагранжиан — $L(q_i, \dot q_i, t)$.

* Уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\boxed{L_i := \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2 \dots, n.}$$

Это уравнения 2-го порядка (т.к. $\frac{d}{dt} = \ddot q_j \frac{\partial}{\partial \dot q_j} + \dot q_j \frac{\partial}{\partial q_j} + \frac{\partial}{\partial t}$). Они не разрешены относительно старших производных $\ddot q_j$. Для их разрешимости требуется невырожденность матрицы $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_i \partial \dot q_j}$, называемой гессианом. В фундаментальных физических моделях эта матрица, зачастую, вырождена. Такие модели называют сингулярными, или моделями со связями, или калибровочными моделями. Мы в особенностях сингулярной динамики разбираться не будем.

* Принцип наименьшего действия

Действие: $$\boxed{S[q_i(t), t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)\,dt}$$ — это функционал на пространстве траекторий $q_i(t)$.

Принцип наименьшего действия утверждает, что механическая система, задаваемая лагранжианом $L(q, \dot{q}, t)$, при движении из точки $q_i^{(0)} = q_i(t_0)$ в точку $q_i^{(1)} = q_i(t_1)$ выбирает траекторию движения $q_i(t)$, являющуюся экстремалью функционала S.

Rem: При формулировке принципа наименьшего действия обычная динамическая задача с начальными условиями $q_i^{(0)} = q_i(t_0)$, $\dot{q}_i^{(0)} = \dot{q}_i(t_0)$ заменяется на краевую задачу $q_i^{(0)} = q_i(t_0)$, $q_i^{(1)} = q_i(t_1)$. При этом существование и единственность решения не гарантированы.

Покажем, что при вычислении экстремали действия S ~~с закреп~~ на траекториях с закрепленными концами получаются уравнения Эйлера-Лагранжа.

$$\delta S = S[q_i(t)+\delta q_i(t), t_0, t_1] - S[q_i(t), t_0, t_1],$$

где $\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0$, см. Рис. 1

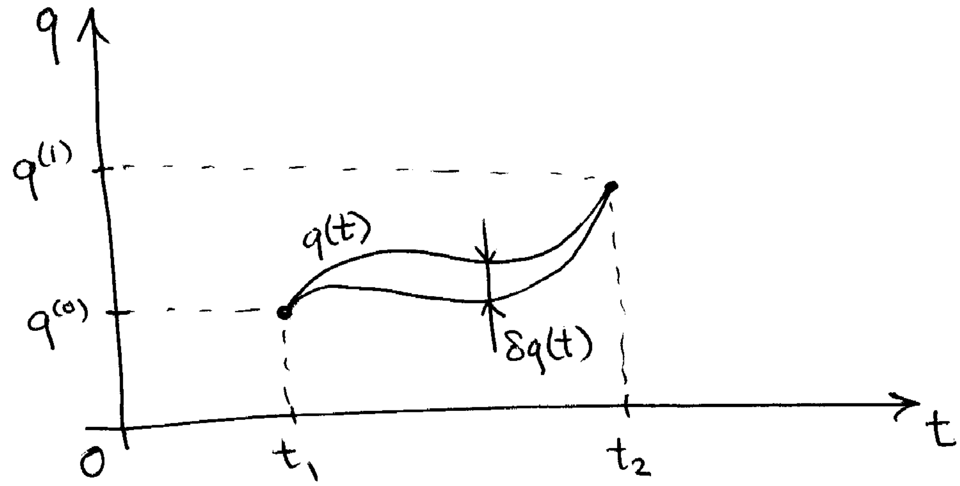


Рис. 1.

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i \right\} dt + o(\delta q) =$$

учтем, что $\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(\delta q_i)$ и проинтегрируем первое слагаемое по частям:

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} \right\} \delta q_i \, dt + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \right|_{t_0}^{t_1}$$

Второе слагаемое зануляется в силу краевых условий нашей вариационной задачи, после чего требование экстремума действия: $\delta S = 0$ при любых $\delta q_i(t)$, приводит к уравнениям Эйлера-Лагранжа на траекторию движения. $\square$

Упражнения к §2:

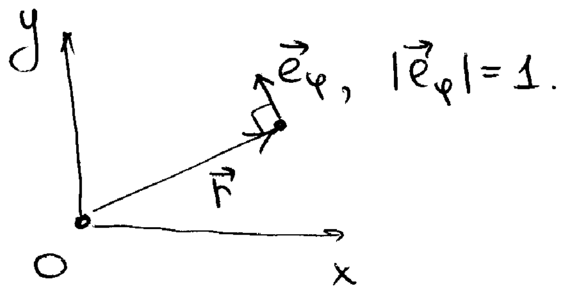
1. Убедитесь, что центральная сила $\vec{F}(\vec{r}) = f(|\vec{F}|)\cdot\vec{r}$ потенциальна. Определите её потенциальную энергию

2. Сформулируйте глобальное условие потенциальности силы $\vec{F}$, воспользовавшись понятием работы силы вдоль контура γ : $\vec{r}(t)$, $t\in[t_1,t_2]$

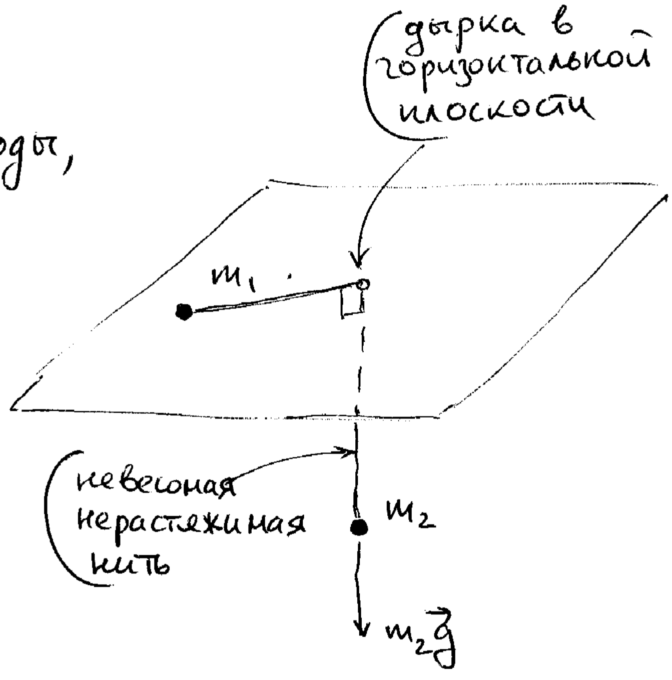
$$A[\gamma] = \int_\gamma (\vec{F}, d\vec{r})$$

Когда локального условия $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$ не достаточно для выполнения глобального?

3. В какой области $\mathbb{R}^2$ сила $\vec{F} = \dfrac{\vec{e}_\varphi}{|\vec{r}|}$ (см. Рис.) потенциальна? Найдите её потенциал.



4. Определите число степеней свободы, постройте лагранжиан и запишите уравнения Эйлера-Лагранжа для системы, изображенной на рисунке:



§3 Законы сохранения. Теорема Э. Нётер

В лагранжевой механике законы сохранения связывают с симметриями действия. Точная формулировка этого соответствия даётся в теореме Э. Нётер. Прежде, чем приступать к ее формулировке, сделаем замечание о лагранжианах.

<u>Rem</u>: Два лагранжиана, отличающиеся на полную производную времени вида:

$$L(q,\dot{q},t) \quad \text{и} \quad \tilde{L}(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) - \frac{d\lambda(q,t)}{dt}$$

дают идентичные наборы уравнений Эйлера-Лагранжа.

Это можно проверить в лоб, но это очевидно при выводе уравнений Э.-Л. из принципа наименьшего действия

? <u>Проверочный вопрос</u>: Почему в полной производной фигурирует функция $\lambda(q,t)$, а не, например, $\lambda(q,\dot{q},t)$?

С учётом сделанного замечания, мы можем считать, что динамика лагранжевой механической системы задаётся не функцией $L(q,\dot{q},t)$ а классом эквивалентности функций:

$$L(q,\dot{q},t) - \frac{d\lambda(q,t)}{dt}, \quad \forall\lambda.$$

Теперь приступим к теореме Нётер: в её формулировке фигурируют инфинитезимальные преобразования координат системы δq_i и времени δt

Теорема Нётер (формулировка I). Если при инфинитезимальных преобразованиях координат системы и времени: $t \mapsto \tilde{t}$, $q_i \to \tilde{q}_i$ вида

$$\begin{cases} \delta t = \tilde{t} - t = \varepsilon \chi_0(q,\dot{q},t), \\ \delta q_i = \tilde{q}_i - q_i = \varepsilon \chi_i(q,\dot{q},t), \end{cases} \qquad (1)$$

здесь ε - малый параметр

лагранжиан системы изменяется на полную производную времени:

$$L\left(\tilde{q}_i, \frac{d\tilde{q}_i}{d\tilde{t}}, \tilde{t}\right) - L\left(q_i, \frac{dq_i}{dt}, t\right) = -\varepsilon \frac{d\lambda(q,t)}{dt} + o(\varepsilon),$$

то система обладает интегралом движения

$$\boxed{I(q,\dot{q},t) = \chi_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \chi_0\left(L - \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \lambda} \qquad (2)$$

Здесь и везде далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

С учётом замечания о лагранжианах, теорему Нётер можно сформулировать так:

<u>Теорема Нётер</u> (формулировка II) Если при одновременной замене координат и времени: $t \mapsto \tilde{t}$, $q_i \mapsto \tilde{q}_i$ (1) и смене представителя в классе эквивалентности лагранжианов: $L \mapsto \tilde{L}$

$$\tilde{L}(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \varepsilon \frac{d\lambda(q,t)}{dt} \quad (3)$$

действие системы не меняется (в 1-м порядке по ε), то система имеет интеграл движения $I(q,\dot{q},t)$ (2).

<u>Доказательство</u> теоремы Нётер — еще одно упражнение по вычислению вариации действия. На сей раз мы рассматриваем вариацию траектории в окрестности решения уравнений Эйлера-Лагранжа и не фиксируем её концов:

$$\delta S = \tilde{S}[\tilde{q}_i(\tilde{t}), \tilde{t}_0, \tilde{t}_1] - S[q_i(t), t_0, t_1] =$$

$$= \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \tilde{L}\left(\tilde{q}(\tilde{t}), \frac{d\tilde{q}(\tilde{t})}{d\tilde{t}}, \tilde{t}\right) d\tilde{t} - \int_{t_1}^{t_2} L\left(q(t), \frac{dq(t)}{dt}, t\right) dt$$

Подставим выражение для $\tilde{L}$ (3) и разобьем интеграл $\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} .. d\tilde{t}$ на 3 слагаемых: $\left(\int_{\tilde{t}_1}^{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} + \int_{t_2}^{\tilde{t}_2}\right) \dots d\tilde{t}$:

$$= \varepsilon\lambda(\tilde q(\tilde t),\tilde t)\Big|_{\tilde t_1}^{\tilde t_2} + \Big(\int_{\tilde t_1}^{t_1} + \int_{t_2}^{\tilde t_2}\Big) L\big(\tilde q, \tfrac{d\tilde q}{d\tilde t}, \tilde t\big)\, d\tilde t +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \Big\{ L\big(\tilde q(t), \tfrac{d\tilde q(t)}{dt}, t\big) - L(q(t),\dot q(t), t)\Big\} dt$$

Здесь поменяли переменную интегрирования $\tilde t \to t$.

Оценим все слагаемые в 1-м порядке по ε:

$$= \varepsilon\lambda(q(t),t)\Big|_{t_1}^{t_2} + L(q(t_2),\dot q(t_2),t_2)\underbrace{\varepsilon X_0(q(t_2),\dot q(t_2),t_2)}_{\tilde t_2 - t_2} -$$

$$- L(q(t_1),\dot q(t_1),t_1)\underbrace{\varepsilon X_0(q(t_1),\dot q(t_1),t_1)}_{\tilde t_1 - t_1} +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \Big\{ \frac{\partial L}{\partial q_i}\big(\tilde q_i(t) - q_i(t)\big) + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\big(\dot{\tilde q}_i(t) - \dot q_i(t)\big)\Big\} dt + o(\varepsilon)$$

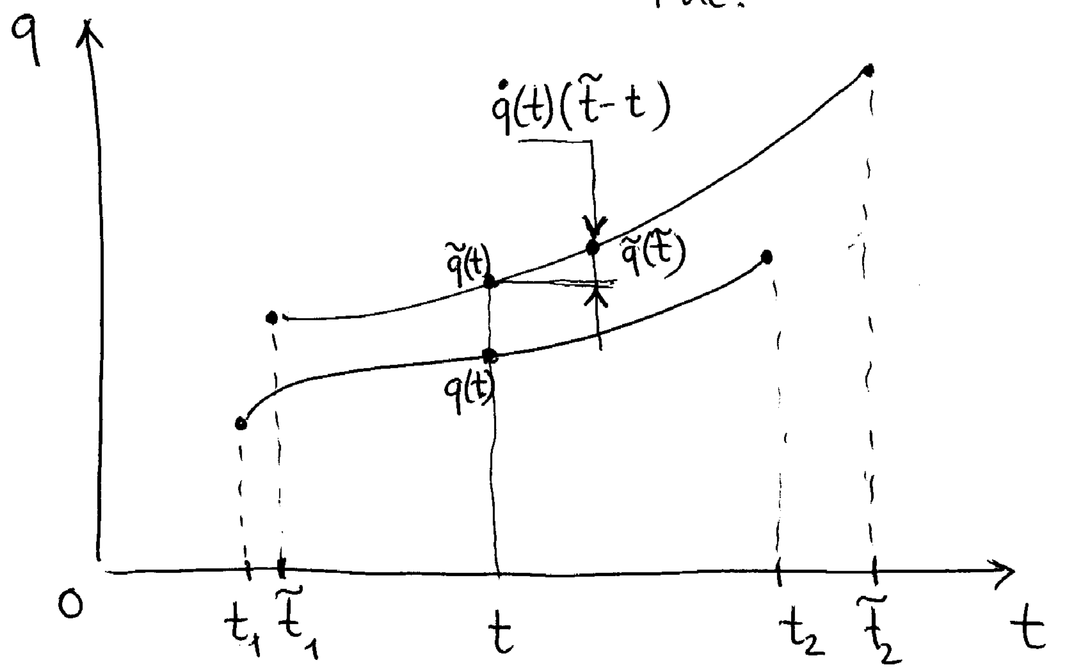
Интегрируем по частям последний член:

$$= \varepsilon\Big(\lambda(q(t),t) + X_0(q(t),\dot q(t),t)\, L(q(t),\dot q(t),t)\Big)\Big|_{t_1}^{t_2} +$$

$$+ \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\big(\tilde q_i(t) - q_i(t)\big)\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\Big(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\Big)\big(\tilde q_i(t) - q_i(t)\big) dt$$

Остаётся аккуратно посчитать величину $\tilde q_i(t) - q_i(t)$, см. Рис.:

Рис.



$$\tilde q_i(t) - q_i(t) = \left(\tilde q_i(\tilde t) - q_i(t)\right) - \left(\tilde q_i(\tilde t) - \tilde q_i(t)\right) =$$

$$= \delta q_i - \dot q_i(t)(\tilde t - t) + o(\varepsilon)$$

$$= \varepsilon(\chi_i - \dot q_i \chi_0) + o(\varepsilon).$$

Итак:

$$\delta S = \varepsilon\left(\lambda(q,t) + \chi_0\left(L - \dot q_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) + \chi_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} -$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} L_i\,(\tilde q_i(t) - q_i(t))\,dt$$

левая часть уравнений Э.-Л.

По условию теоремы Нётер $\delta S = 0$. Если теперь в качестве $q_i(t)$ мы выберем траекторию движения системы, то $L_i = 0$, и мы имеем

$$I(q,\dot q,t)\Big|_{t_1}^{t_2} \overset{L_i=0}{=\!=} 0$$

□

Примеры законов сохранения

Рассмотрим модельный лагранжиан

$$L = \sum_i \frac{m_i \dot{q}_i^2}{2} - U(|q_i - q_j|) \text{ — система}$$

массивных материальных точек на прямой со взаимодействием, зависящим только от расстояний между точками.

1 Закон сохранения импульса

Преобразование $\begin{cases} \delta q_i = \varepsilon \\ \delta t = 0 \end{cases}$ оставляет L неизменным, поэтому на траекториях движения сохраняется полный импульс системы:

$$P = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\chi_i = 1, \chi_0 = 0, \lambda = 0 \right) = \sum_i m_i \dot{q}_i$$

Вообще, величины $\boxed{p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}$ называются

обобщенными импульсами системы (отвечающими координатам q_i). Каждая из них сохраняется в случае, если L не зависит от соответствующей координаты q_i.

2 Закон сохранения энергии

Преобразование $\begin{cases} \delta q_i = 0 \\ \delta t = -\varepsilon \end{cases}$ не меняет лагранжиан в случае, если он не зависит от времени явно: $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

В частности, наш модельный лагранжиан не меняется. Поэтому на траекториях движения сохраняется величина

$$\boxed{E = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L} \quad (\chi_i = 0, \chi_0 = -1, \lambda = 0) =$$

$$= \sum_i \frac{m_i \dot{q}_i^2}{2} + U,$$

называемая энергией системы.

Rem: Убедитесь, что если $L = T - U$, где T — квадратичная форма скоростей $\dot{q}_i$, а U зависит только от координат, то

$$E = T + U.$$

3 Закон сохранения момента импульса

Пусть q_i — векторные величины: $q_i = \{q_{i,a}\}_{a=1,\dots,N}$ в N-мерном пространстве. Пусть в модельном лагранжиане $\dot{q}_i^2 = \sum_{a=1}^{N} \dot{q}_{i,a}^2$, а $|q_i - q_j|$ означает длину вектора. Тогда L инвариантен при вращениях в N-мерном пространстве, то есть при ортогональных преобразованиях вида

$$q_i \longmapsto O q_i\,, \quad O^T O = \mathrm{id}.$$

Здесь $O q_i = \{ O_{ab} q_{i,b} \}_{a=1\ldots N}$, $O = \| O_{ab} \|_{a,b=1..N}$

Соответствующие инфинитезимальные преобразования задаются кососимметрическими матрицами ω:

$$O = \exp\{\varepsilon\omega\}\,, \quad \omega^T = -\omega\,,$$ ε – малый угол поворота.

При этом

$$\delta q_{i,a} = (O q_i - q_i)_a = \varepsilon\, \omega_{ab} q_{i,b}\,.$$

Отвечающий этим преобразованиям интеграл движения

$$\boxed{M_\omega = \frac{\partial L}{\partial \dot q_{i,a}} \omega_{ab} q_{i,b}}$$

$$(\chi_{i,a} = \omega_{ab} q_{i,b}\,, \chi_0 = \lambda = 0)$$

называют <u>моментом импульса системы</u>.

4) <u>Пример с $\lambda \neq 0$</u>.

Рассмотрим преобразование перехода в равномерно и прямолинейно движущуюся систему координат:

$$\delta q_i = \varepsilon t\,, \quad \delta t = 0\,,$$ где ε – малый параметр скорости движущейся системы. При таком преобразовании модельный лагранжиан изменяется на полную производную времени:

$$L(q_i+\delta q_i, \dot q_i + \delta \dot q_i, t+\delta t) = \sum_i \frac{m_i(\dot q_i + \varepsilon)^2}{2} - U(q) =$$

$$= L(q, \dot q, t) + \varepsilon \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i q_i\right)$$

Вводя поправку $\tilde L = L + \varepsilon \frac{d\lambda}{dt}$, где $\lambda = -\sum_i m_i q_i$ добиваемся инвариантности действия при таких преобразованиях, и имеем интеграл движения:

$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \cdot \underbrace{t}_{x_i} \underbrace{- \sum m_i q_i}_{\lambda} = \sum_i m_i (\dot q_i t - q_i)$$

Этот интеграл движения сообщает нам о равномерности движения центра масс системы $Q(t) = \frac{\sum m_i q_i}{\sum m_i}$. Его значение $I = -\sum_i m_i \cdot Q(0)$.

Формально, как функция на фазовом пространстве, этот интеграл независим от закона сохранения импульса: $P = \sum_i m_i \dot q_i$. Однако на траекториях движения системы эти законы сохранения, очевидно, связаны.

Таким образом, мы рассмотрели все возможные преобразования, переводящие в нерелятивистской механике одну инерциальную систему отсчета в другую: трансляции и повороты в пространстве, сдвиг начала отсчета времени, переход в движущуюся систему координат, и обнаружили 3 вида связанных с ними законов сохранения

(А) Однородность пространства ($\delta q_i = \varepsilon$) $\Rightarrow$
<u>Закон сохранения импульса системы</u>

(Б) Однородность времени ($\delta t = \varepsilon$) $\Rightarrow$
<u>Закон сохранения энергии.</u>

(В) Изотропность пространства ($\delta q_i = \varepsilon \omega q_i$, $\omega^T = -\omega$) $\Rightarrow$
<u>Закон сохранения момента импульса.</u>

Эти законы выполняются во всех фундаментальных моделях механики и теории поля (классической и квантовой).