Листок 3

1. Доказать, что выпуклая оболочка $\mathrm{conv}M$, $M \subset A^n$, является выпуклым множеством.

2. Имеет ли следующая система линейных уравнений нетривиальные неотрицательные решения

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad ?$$

3. Отображение φ: $A^n \to A^m$ аффинных пространств называется аффинным, если
а) $\varphi(\lambda X + (1-\lambda)Y) = \lambda\varphi(X) + (1-\lambda)\varphi(Y)$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ и любых X, $Y \in A^n$;
б) $\varphi(\sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i X_i) = \sum \lambda_i \varphi(X_i)$ для любых N-точек $X_1, \ldots, X_N \in A^n$ и любых вещественных $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$, $\sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$.

Доказать эквивалентность этих определений.

4. Подмножество $\widehat{A}$ аффинного пространства $\mathbb{R}^d$ (точки этого пространства суть наборы вещественных чисел $(x_1, \ldots, x_d)$) называется аффинным подпространством, если
а) из того, что a_1, $a_2 \in \widehat{A}$ следует, что $\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 \in \widehat{A}$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$;
б) $\widehat{A} = p + A$, где p – точка, а A подпространство линейного пространства $\mathbb{R}^d$;
в) $\widehat{A}$ есть множество решений уравнения $QX = b$, где $Q \in \mathrm{Mat}_d(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix}$.

Докажите эквивалентность этих трех определений.

5. Доказать следующие свойства выпуклых оболочек множеств в аффинном пространстве:
1) $\mathrm{conv}(F_1 \cup F_2) = \mathrm{conv}(\mathrm{conv}F_1 \cup \mathrm{conv}F_2)$;
2) $\mathrm{conv}(F_1 \cap F_2) \subset \mathrm{conv}F_1 \cap \mathrm{conv}F_2$.

6. Доказать, что выпуклая оболочка $\mathrm{conv}F$ есть наименьшее (по включению) выпуклое множество, содержащее F.

7. Доказать теорему Радона: пусть $M = \{X_1, \ldots, X_n\}$ конечное множество из n точек в d-мерном аффинном пространстве A^d, причем $n \geq d+2$. Тогда в M существуют такие подмножества M_1 и M_2, что $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 = M$ и $\mathrm{conv}M_1 \cap \mathrm{conv}M_2 \neq \emptyset$.

8. Доказать теорему Хелли для отрезков на прямой: если любые два отрезка на прямой имеют общую точку, то и все отрезки имеют общую точку.

9. Индукцией по k ($k \geq 3$) получить теорему Хелли для k выпуклых фигур на плоскости.

10*. Доказать, что любая выпуклая фундаментальная плитка для группы параллельных переносов $\mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$ является центрально-симметричным многоугольником (а точнее: аффинно правильным четырехугольником или шестиугольником).

11. Группа Γ движений евклидовой плоскости называется дискретной, если для любой точки $x \in E^2$ её орбита под действием группы $\{\Gamma x\}$ – дискретное подмножество евклидовой плоскости. Может ли дискретная группа Γ состоять только из вращений и при этом быть бесконечной?

12. Пусть $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ – базис n-мерного евклидова пространства E^n. Доказать, что объем "коробочки", построенной на векторах $\{e_1, \ldots, e_n\}$ равен $\sqrt{\det G(e)}$, где $G(e) = (g_{ij})$, $g_{ij} = (e_i, e_j)$, матрица Грама скалярного произведения в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$.