Лекция 2-3

Релетивистская механика

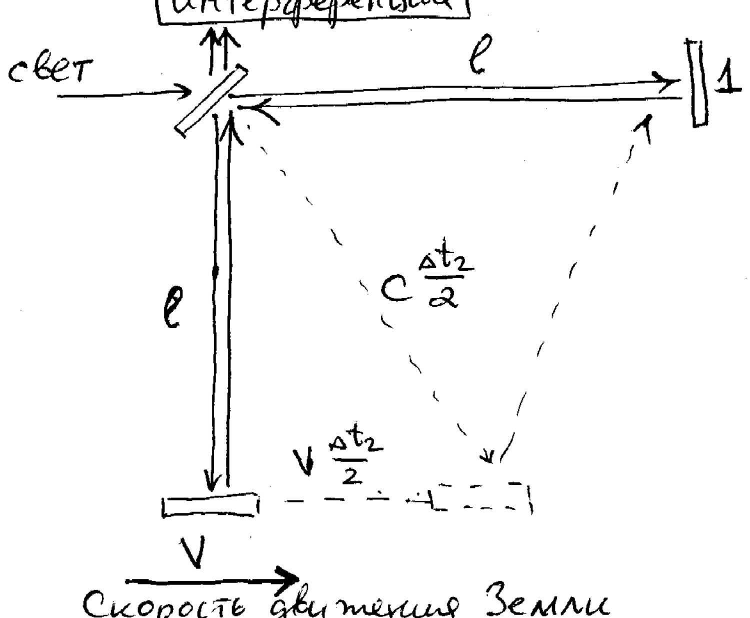
§1. Принцип относительности

Законы классической нерелетивистской механики инвариантны относительно, так называемых, преобразований Галилея — трансляций, поворотов, сдвига начала отсчёта времени и перехода в равномерно поступательно движущиеся системы координат.

Однако к концу 19 века окончательно оформилась фундаментальная физическая теория — теория электромагнитных взаимодействий, в которой принцип относительности Галилея нарушался явно. Действительно, уравнения Максвелла содержат константу c, имеющую смысл скорости света. Но согласно классическим представлениям скорость света константой быть не может: ее значение зависит от выбора системы отсчета. Следовательно, рассуждали физики, уравнения Максвелла записаны в какой-то выделенной системе отсчёта, где скорость света равна c. Оно и понятно, свет — это электромагнитная волна, а волны, согласно с нашим повседневным опытом, должны быть колебаниями среды (звуковые волны, волны на поверхности воды...). Среду, в которой распространяется свет, назвали эфиром, а выделенная система отсчета — система, где эфир покоится.

Встала задача — обнаружить эфир, померить наше движение относительно него. Этому был посвящен эксперимент Майкельсона-Морли (Albert Michelson, Edward Morley, 1887г.)

Напомним схему эксперимента: мы полагаем, что Земля как-то движется относительно эфира, запускаем луч света в направлениях ⊥ и ∥ движению Земли, и наблюдаем разницу времен прохождения светом одинакового расстояния в этих направлениях (см. Рис)



Скорость движения Земли относительно эфира.

В эксперименте пучок света подавался на полупрозрачную пластину, которая расщепляла его на 2 пучка.

1-й пучок летел (условно) параллельно направлению движения Земли в эфире, отражался от зеркала 1, находящегося на расстоянии

ℓ от пластины и возвращался назад через промежуток времени

$$\Delta t_1 = \frac{\ell}{c-v} + \frac{\ell}{c+v} = \frac{2\ell}{c(1-v^2/c^2)}.$$

2-й пучок летел в перпендикулярном направлении и отражался от зеркала 2, находящегося на том же расстоянии ℓ от пластины. Его время в пути Δt_2 вычисляется из соотношения

$$\ell^2 + \left(v\frac{\Delta t_2}{2}\right)^2 = \left(c\frac{\Delta t_2}{2}\right)^2 \text{ (см. Рис.)}$$

$$\Delta t_2 = \frac{2\ell}{c\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

откуда $\Delta t_2 - \Delta t_1 \cong \frac{\ell}{c}\frac{v^2}{c^2}$ (полагаем $v \ll c$), а значит два луча (две электромагнитных волны) возвращаются на пластину в разной фазе, и могут либо усилить, либо погасить друг друга (интерференция).

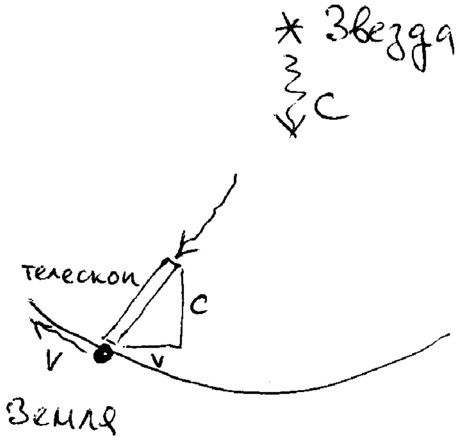
Поворачивая прибор на $90°$ против часовой стрелки мы меняем ролями лучи. Следовательно, при повороте меняется относительная фаза лучей, и должна меняться освещенность в месте встречи лучей.

Ничего подобного в эксперименте не наблюдалось! Приходится заключить $V = 0$.

Есть вариант, что по стечению обстоятельств
Земля покоится относительно эфира. Однако система
отсчета Земли не вполне инерциальна. Она крутит-
ся относительно более инерциальной системы отсчета
Солнца. Мы полагаем, что система покоя эфира инер-
циальна. Так что если в какой-то момент Земля
покоится относительно эфира, то через полгода она
должна двигаться относительно него со скоростью
60 км/сек (дважды скорость движения Земли по орбите).

Еще один вариант разрешения парадокса: Земля
увлекает за собой эфир, и таким образом в окрест-
ности Земли $v = 0$. Конечно, это плохое решение
проблемы, так как наши представления о фунда-
ментальном объекте - эфире - значительно усложняются.
Но этот вариант противоречит наблюдению аберра-
ции света: скорость света, приходящего к нам
от звёзд складывается со скоростью движения Земли
по орбите. В результате, вектор направления
этой скорости в течение года меняет направление:
в разные времена года мы наблюдаем звезды на

небосклоне под разными углами. Если б эфир увлекался Землей (а свет распространяется в эфире), то аберрации бы не наблюдалось



Непротиворечивое объяснение результату опыта Майкельсона-Морли дали Лоренц (1892) (количественно) и Фитцджеральд (1889) (качественно) /независимо/. Они обратили внимание, что линейка, которой мы измеряем ~~длину~~ расстояние, состоит из молекул, расстояние между которыми контролируется электромагнитными силами. Согласно уравнениям Максвелла потенциал электромагнитного поля движущегося объекта "сплющивается" в направлении движения с коэффициентом $\sqrt{1-v^2/c^2}$. Поэтому при движении тел изменяются их пропорции в направлении $\parallel$ и $\perp$ движению:

$$l_{\parallel} = \sqrt{1-v^2/c^2}\, l_0 \quad , \quad l_{\perp} = l_0 .$$

где l_0 – размер покоящегося объекта.

Этот эффект полностью нивелирует разницу между Δt_1 (связано с $l_{\parallel}$) и Δt_2 (связано с $l_{\perp}$) в экспе-

римента ~~Майкельсона~~-Морли, ~~так~~ что
наблюдать движение Земли относительно эфира
становится невозможно.

После объяснений Лоренца-Фитцджеральда стало ясно, что обнаружить эфир и его систему отсчета в физических экспериментах невозможно.

Эфир ненаблюдаем.

Следующий шаг — отказ от гипотезы эфира, то есть утверждение представления о том, что для распространения электромагнитной волны не нужна среда-носитель. Э.-м. волна — фундаментальный физический объект (как материальная точка, элементарная частица...). Она распространяется в пустоте.

А раз так, то требуется поправить принцип относительности Галилея, так как из опыта Майкельсона-Морли следует, что свет распространяется с одной скоростью c в разных инерциальных системах отсчета. Этот шаг сделал А. Эйнштейн (1905 г.) сформулировав принцип относительности:

> (1) Законы природы (не только механики) не позволяют различать инерциальные системы отсчета.
>
> (2) Существует предельная скорость распространения сигналов – c. Скорость распространения света в вакууме с ней совпадает.

Вторая часть ~~постулата~~ принципа относительности Эйнштейна совершенно контр-интуитивна. Вместо того, чтобы объяснить опыт Майкельсона-Морли, она возводит его отрицательный результат в ранг постулата.

Rem: Заметим, что 2-й постулат принципа относительности в настоящее время очень убедительно подтверждается экспериментами на ускорителях: движущиеся с ультрарелятивистскими (почти c) скоростями частицы излучают свет с той же скоростью c, что и покоящиеся. Например, быстрые π^0-мезоны, распадаются на пару фотонов, скорость которых в лабораторной системе равна c (а не $2c$, как можно было предположить).

Второй постулат разрушает привычное представление о том, что время течет во всех системах отсчета одинаково. Оказывается, временная координата, как и пространственные, привязана к выбранной системе отсчета, и меняется при переходе от одной системы к другой. Для того, чтобы убедиться в этом, Энштейн предложил мысленный эксперимент с поездом:

Наблюдатель O разместил на равных расстояниях l от себя вдоль железной дороги два источника света A и B. В момент времени $t=0$ (в системе наблюдателя O !) источники одновременно включаются (рис. 1А)

[Rem: В системе наблюдателя O (и в $\forall$ системе отсчета) можно синхронизировать часы во всех точках. Предложите процедуру, как этого можно добиться с использованием сигналов света

В это время мимо проезжает поезд, и пассажиры на местах A′ и B′ фиксируют вспышки света. В момент времени $t = c/l$ в системе наблюдателя O он фиксирует одновременное прибытие световых сигналов от источников

Рис. 1а

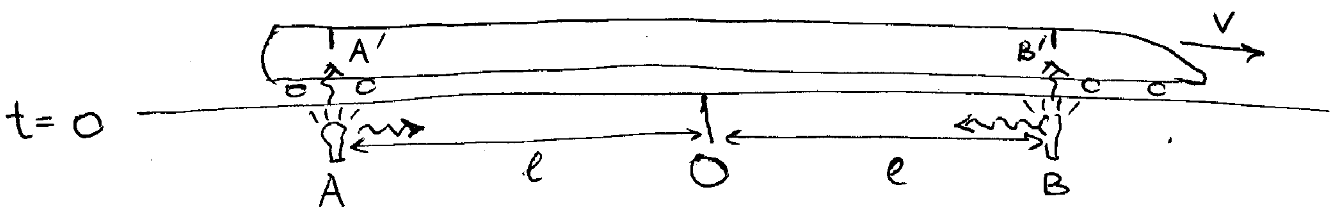
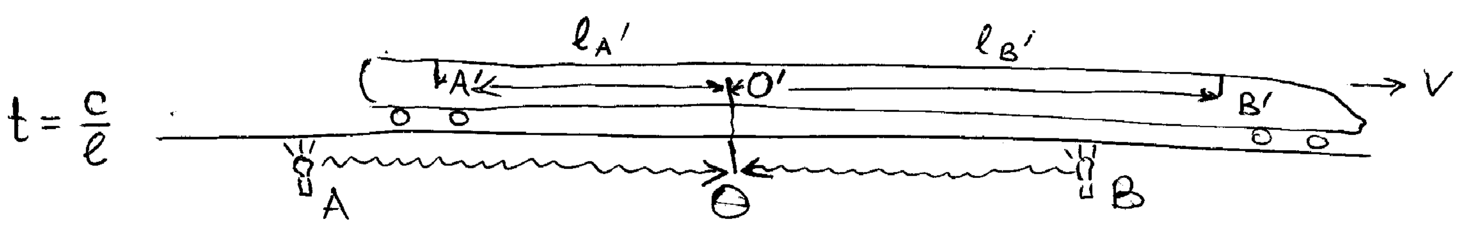


Рис. 1в



A и B. Это же событие наблюдает и пассажир O', проезжающий мимо в поезде. (рис 1в).

Наблюдатель O заключает, что источники A и B в его системе отсчета действительно были включены одновременно.

Наблюдатель же O', пообщавшись с пассажирами A' и B' и оценив расстояние от себя до них: $\ell_{A'} < \ell_{B'}$, делает вывод, что в системе отсчета поезда источник света A загорелся позже источника B.

Итак, события, одновременные в одной системе отсчета, не являются одновременными в другой. Понятие одновременности, а значит и течение времени зависит от выбора системы отсчёта. Поэтому при описании в каждой системе отсчёта надо указывать его координаты и время, когда оно случилось в данной системе отсчета. Для этого мы будем использовать 4-векторы

$$\boxed{x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{x})}$$

Для описания времени используем координату $x^0 = ct$ той же размерности, что и пространственные координаты $\vec{x}$.

§2 Пространство Минковского. Преобразования Лоренца.

Нам необходимо выяснить, как связаны между собой координаты события в разных инерциальных системах отсчета.

Рассмотрим две таких системы: O и O'.

Мы будем полагать, что координаты события в этих системах: x^μ и x'^μ связаны линейным преобразованием:

$$\boxed{x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + C^\mu} \qquad (*)$$

Здесь $\Lambda^\mu{}_\nu$ и C^μ – постоянные 4×4 матрица и 4-вектор с вещественными коэффициентами.

Мы также отныне примем соглашение:

> По ~~повторяющимся~~ парам одинаковых индексов, верхнему и нижнему, подразумевается суммирование.

Наш выбор линейных преобразований является простейшим, удовлетворяющим двум условиям:

1) В нерелятивистском пределе преобразования $(*)$ должны переходить в преобразования Галилея, а они линейны

2) Преобразования (*) должны переводить цепочку эквидистантных и равноотстоящих друг от друга во времени событий в такую же эквидистантную (по $\vec{x}'$ и t') цепочку — иначе у нас будет возможность различить системы O и O'!

Итак, рассмотрим 2 события:

(A) испускание луча света в точке A

(B) прием этого луча света в точке B

В системе O координаты этих событий x^μ_A и x^μ_B.

В системе O' — x'^μ_A и x'^μ_B.

Для разностей этих координат $\Delta x^\mu = x^\mu_B - x^\mu_A$ и $\Delta x'^\mu = x'^\mu_B - x'^\mu_A$ в силу (*) имеем:

$$\boxed{\Delta x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \Delta x^\nu} \qquad (*')$$

Заметим теперь, что так как луч света летит между точками A и B со скоростью c

$$(\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2 = c^2 \Delta t - \Delta \vec{x}^2 = 0$$

Вводя 4×4 матрицу

$$\boxed{g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\{1,-1,-1,-1\}},$$

перепишем это равенство в виде:

$$\boxed{\Delta x^{\mu} \Delta x^{\nu} g_{\mu\nu} = 0}$$

Из второго постулата принципа относительности следует, что точно такое же соотношение выполнено и в системе отсчета O':

$$\boxed{\Delta x'^{\mu} \Delta x'^{\nu} g_{\mu\nu} = 0}$$

Следовательно, для рассматриваемых событий выполняется равенство

$$\boxed{\Delta S^2 := \Delta x^{\mu} \Delta x^{\nu} g_{\mu\nu} = \Delta x'^{\mu} \Delta x'^{\nu} g_{\mu\nu}} \quad (**)$$

Сделаем логический скачок и предположим, что соотношение $(**)$ выполнено не только для событий испускания-поглощения света, а для любой пары событий. Величина ΔS^2 в соотношении $(**)$ называется квадратом интервала между двумя событиями. Предположение об инвариантности ΔS^2 при преобразованиях Лоренца позволяет нам охарактеризовать семейство матриц $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ в формуле $(*')$.

Матрицы Λ задают преобразования

$$\Delta x' = \Lambda \Delta x,$$

оставляющие инвариантной квадратичную форму

$$\boxed{\Delta S^2 = \Delta x^T g \Delta x}. \quad (**')$$

Такие матрицы Λ образуют группу Ли $O(1,3)$, называемую группой Лоренца. Нас в дальнейшем интересует компонента связности единицы этой группы, называемая специальной ортохронной группой Лоренца – $SO_{\uparrow}(1,3)$.

Это подгруппа таких матриц Λ, что

а) $\det \Lambda = 1$ (исключаем отражения)

б) $\mathrm{sign}(x^{0\prime}) = \mathrm{sign}(x^0)$ (исключаем обращение времени)

Пространство 4-векторов x^μ, снабженное индефинитной метрикой $g_{\mu\nu}$, на котором действует группа Лоренца, называется пространством-временем Минковского.

Как нетрудно убедиться, условие инвариантности формы $(**')$ приводит к следующему соотношению для матриц Λ:

$$\boxed{\Lambda^T g \Lambda = g} \qquad (***)$$

Для дальнейшего удобства вводится процедура опускания индексов 4-векторов:

$$\boxed{x_\mu := g_{\mu\nu} x^\nu} = (x^0, -\vec{x})$$

В этих обозначениях условие инвариантности формы (**$'$) принимает вид:

$$\boxed{\Delta x^\mu \Delta x_\mu = \mathrm{inv}\left(\begin{matrix}\text{относительно}\\ \text{преобр. Лоренца}\end{matrix}\right)}$$

Можно не только опускать, но и поднимать индексы: $\boxed{x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu}$, где $g^{\mu\nu} = (g^{-1})_{\mu\nu}$.

Нетрудно убедиться, что

$$\boxed{g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}\{1,-1,-1,-1\} = g_{\mu\nu}}.$$

Индексы можно опускать-поднимать не только у 4-векторов, но и у мульти-индексных объектов (тензоров). Например:

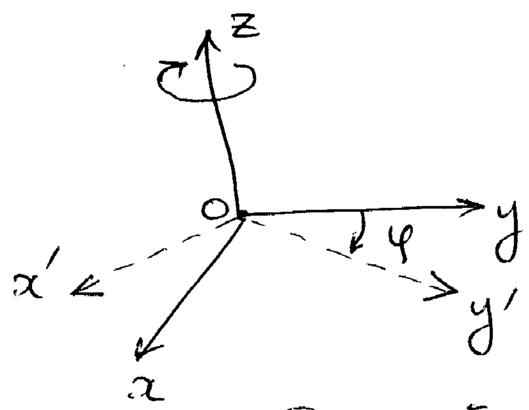
$$\boxed{g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = g^\mu{}_\nu = \mathrm{diag}(1,1,1,1)} = \delta^\mu_\nu \text{ - символ Кронекера.}$$

Теперь изучим частные случаи преобразований Лоренца, когда преобразуется только пара из ~~всех~~ координат 4-вектора x^μ.

1) <u>Вращение в плоскости 2-х пространственных переменных</u>, например (x^1, x^2). Соответствующая матрица преобразования Лоренца:

$$L_{12}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ — это

поворот на угол φ вокруг оси $\vec{Oz}$ по часовой стрелке:



Пространственные вращения образуют подгруппу $SO(3)$ в группе Лоренца. В качестве линейного базиса в соответствующей 3-мерной алгебре Ли $so(3)$ можно выбрать генераторы вращений Ω_i, $i=1,2,3$, вокруг осей $\vec{Ox_i}$. В частности,

$$L_{12}(\varphi) = \exp(\varphi\Omega_3),$$ где

$$\Omega_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Коммутационные соотношения для генераторов Ω_i имеют вид (проверьте!):

$$\boxed{[\Omega_i, \Omega_j] = \varepsilon_{ijk}\Omega_k},$$ где

ε_{ijk} – полностью антисимметричный тензор, $i,j,k \in \{1,2,3\}$, причем $\varepsilon_{123} = 1$. (тензор Леви-Чивита)

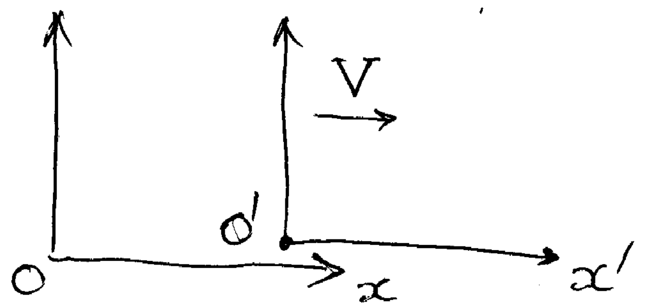
---

2) "Вращения" в плоскости одной временной и одной пространственной переменных, например (x^0, x^1)

$$L_{01}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}\,\theta & -\mathrm{sh}\,\theta & 0 & 0 \\ -\mathrm{sh}\,\theta & \mathrm{ch}\,\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} -$$

это, так называемые, Лоренцевы бусты.

Буст $L_{01}(\theta)$ описывает переход в движущуюся вдоль оси $O\vec{x}_1$ систему координат. Чтобы установить связь параметра θ со скоростью движения V системы O' относительно O, проследим за движением начала координат системы O'.



В системе O' оно покоится, то есть за промежуток времени $\Delta t'$ между двумя измерениями разница показаний координат будет

$$\boxed{\Delta x^{1'} = 0.}$$

В системе O оно движется со скоростью V, то есть за время Δt между 2-мя измерениями имеем

$$\boxed{\Delta x^1 = V\Delta t = \frac{V}{c}\Delta x^0.}$$

Буст $L_{01}(\theta)$ осуществляет преобразование

$$\begin{pmatrix} \Delta x'^0 \\ \Delta x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\theta & -\operatorname{sh}\theta \\ -\operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^0 \\ \Delta x^1 \end{pmatrix},$$

откуда заключаем

$$\boxed{\operatorname{th}\theta = \frac{V}{c}}$$

Параметр Θ называется быстротой (rapidity)

Он удобен тем, что при проведении нескольких бустов в одном направлении Θ аддитивен:

$$L_{01}(\theta_1)\, L_{01}(\theta_2) = L_{01}(\theta_1 + \theta_2)$$

В естественных нам переменных $\Delta t = \frac{\Delta x^0}{c}$, $\Delta t' = \frac{\Delta x^{0'}}{c}$ ~~[illegible]~~ Лоренцев буст имеет вид:

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta t' &= \frac{\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x^1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\\ \Delta x'^1 &= \frac{\Delta x^1 - V\Delta t}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\end{aligned}} \iff \boxed{\begin{aligned}\Delta t &= \frac{\Delta t' + \frac{V}{c^2}\Delta x'^1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\\ \Delta x^1 &= \frac{\Delta x'^1 + V\Delta t'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\end{aligned}}$$

$$\Delta x'^2 = \Delta x^2, \quad \Delta x'^3 = \Delta x^3. \qquad (\star)$$

Вводя генераторы Θ_i, $i = 1, 2, 3$, лоренцевых бустов вдоль направлений $O\vec{x}_i$:

$$L_{0i}(\theta) = \exp(\theta\,\Theta_i),$$

мы получаем базис Ω_i, Θ_i, $i = 1,2,3$, в 6-мерной алгебре Ли $so(1,3)$ группы Лоренца.

Задание: постройте матрицы Θ_i и убедитесь, что коммутационные соотношения Ω_i и Θ_j имеют вид:

$$\boxed{\begin{aligned}[\Omega_i, \Theta_j] &= \varepsilon_{ijk}\Theta_k\\ [\Theta_i, \Theta_j] &= -\varepsilon_{ijk}\Omega_k\end{aligned}}$$

Вводя единообразные обозначения для генераторов алгебры Лоренца

$M_{12} := \Omega_3 \qquad M_{01} := \Theta_1$

$M_{23} := \Omega_1 \qquad M_{02} := \Theta_2$

$M_{31} := \Omega_2 \qquad M_{03} := \Theta_3$

и условившись $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$, для кососимметрического 4-тензора 2-го ранга имеем коммутационные соотношения вида (проверьте!)

$$\boxed{\begin{aligned}[M_{\mu\nu}, M_{\rho\lambda}] = &-g_{\mu\rho} M_{\nu\lambda} + g_{\nu\rho} M_{\mu\lambda} + \\ &+ g_{\mu\lambda} M_{\nu\rho} - g_{\nu\lambda} M_{\mu\rho}\end{aligned}}$$

~~Это ковариантное обозначения~~

Это коммутационные соотношения алгебры Лоренца в ковариантных 4-обозначениях.

Задание: Убедитесь, что элементы M алгебры Лоренца выделяются среди всех вещественнозначных 4×4 матриц условием

$$\boxed{M^T g + g M = 0}.$$

Указание: Воспользуйтесь тем фактом, что $\Lambda = \exp(\lambda M)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, есть элемент группы Лоренца.

Добавление: алгебра Ли группы Пуанкаре (19.1)

До сих пор мы рассматривали исключительно однородные преобразования в пространстве Минковского, образующие группу Лоренца. Вернемся к линейным преобразованиям общего вида

$$\boxed{x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu},} \qquad (*)$$

где $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ – матрица преобразования Лоренца, а c^{μ} отвечает за трансляции в пространстве и времени. Такие преобразования образуют группу Пуанкаре.

Поскольку эти преобразования неоднородны, задать для них линейное представление (т.е. представление в линейном пространстве) не представляется возможным.

Мы определим представление группы Пуанкаре матрицами размера 5×5 вида

$$\Pi^{A}{}_{B} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \Lambda^{\mu}{}_{\nu} & a^{\mu} \\ \hline 0\,0\,0\,0 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

действующими на 5-векторах $X^{A} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \left(\begin{array}{c} x^{\mu} \\ \hline 1 \end{array} \right)$

В таких обозначениях $(*)$ можно записать в виде

$$\boxed{X'^{A} = \Pi^{A}{}_{B} X^{B}}$$

В этом представлении удобно определяется алгебра Ли инфинитезимальных преобразований, отвечающих группе Пуанкаре.

Генераторы алгебры Лоренца в нём имеют вид

$$\mathbb{M}_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} M_{\mu\nu} & \begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix} \\ \hline 0\ 0\ 0\ 0 & 0 \end{array}\right)$$

, где $M_{\mu\nu}$ – уже посчитанные нами 4×4 матрицы генераторов

Генераторы трансляций вдоль осей x^μ имеют вид

$$\mathbb{P}_\mu = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \\ \hline 0\ 0\ 0\ 0 & 0 \end{array}\right).$$

на μ-ом месте

Как нетрудно убедиться, коммутационные соотношения для вновь введенных $\mathbb{P}_\mu$ таковы:

$$\boxed{\begin{aligned} [\mathbb{P}_\mu, \mathbb{P}_\nu] &= 0 \\ [M_{\mu\nu}, \mathbb{P}_\rho] &= -g_{\mu\rho}\mathbb{P}_\nu + g_{\nu\rho}\mathbb{P}_\mu \end{aligned}} \quad (**)$$

Или, в 3-векторных обозначениях $M_{\mu\nu} \to (\Omega_i, \Theta_i)$
$\mathbb{P}_\mu \to (P_0, P_i)$:

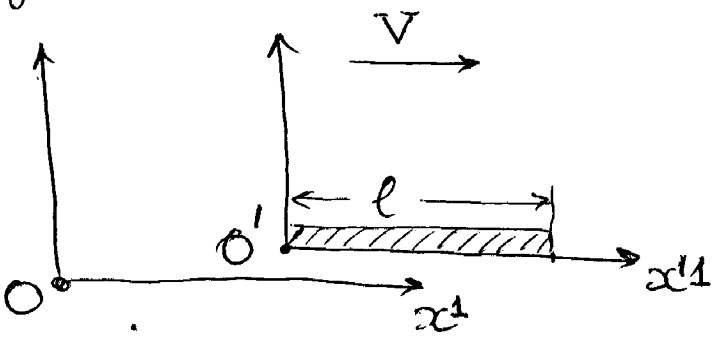
$$\boxed{\begin{aligned} [\Omega_i, P_j] &= \varepsilon_{ijk} P_k \\ [\Theta_i, P_j] &= -\delta_{ij} P_0 \\ [\Theta_i, P_0] &= -P_i \end{aligned}}$$

перечислили только ненулевые из коммутаторов в (**)

§ 3. Физические эффекты

(A) Релятивистское сокращение длин.

Рассмотрим эксперимент по измерению длины движущегося объекта. Поместим линейку длины ℓ вдоль оси $\overrightarrow{Ox^1}$ в систему O'. Пусть система O' движется вдоль $\overrightarrow{Ox^1}$ относительно нас (система O) со скоростью V. Будем измерять разницу между координатами концов линейки в системах O и O'.



В системе O', очевидно, результат измерения будет

$$\boxed{\Delta x'^1 = \ell}.$$

Чтобы измерить длину линейки в системе O, условимся измерять координаты ее концов одновременно: $\boxed{\Delta t = 0}$. Тогда Δx^1 и будет измерением длины линейки в системе O.

Из формул (☆) преобразований Лоренца вычисляем:

$$0 = \Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{V}{c^2}\Delta x'^1}{\sqrt{\dots}} \Rightarrow \boxed{\Delta t' = -\frac{V}{c^2}\ell}$$

– промежуток времени между измерениями в системе O'.

И далее:

$$\Delta x^1 = \frac{\Delta x'^1 + V\Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{\ell - \frac{V^2}{c^2}\ell}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\,\ell$$

Заключаем: Движущиеся объекты сокращаются вдоль направления движения. Коэффициент сокращения $\sqrt{1 - V^2/c^2}$.

В поперечном направлении сокращения не происходит. ($\Delta x'^2 = \Delta x^2$, $\Delta x'^3 = \Delta x^3$)

Rem: Мы получили именно тот коэффициент продольного сокращения длин, который позволил Лоренцу и Фитцджеральду объяснить отрицательный результат эксперимента Майкельсона-Морли.

Б) Релятивистское замедление времени. Собственное время.

Сравним временные промежутки между событиями в разных системах отсчета. Поместим в начало координат системы O' частицу. За время $\Delta t'$ она сдвинется на расстояние $\boxed{\Delta x'^1 = 0}$.

В системе O, относительно которой O' движется со скоростью V (вдоль оси $\vec{Ox^1}$) интервалы Δt и Δx^1 вычисляются по формулам (★)

Имеем $\Delta x = V\Delta t$, и $\Delta t = \dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$.

Время в системе, где частица движется со скоростью V течёт быстрее, чем время в ее собственной системе, где она покоится. Время в системе покоя частицы называется собственным временем и обычно обозначается τ. Формула пересчёта времени в систему, где частица имеет скорость $\vec{v}$ такова:

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-|\vec{v}|^2/c^2}}}$$

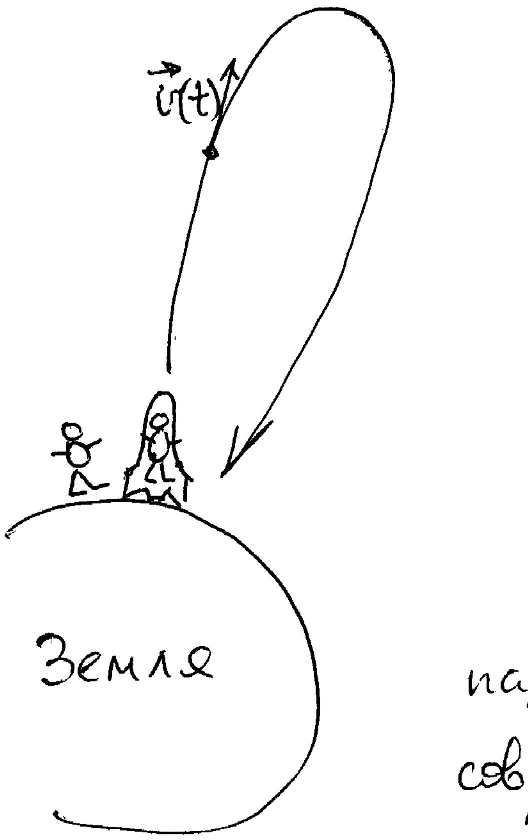
$\Delta\tau$ связано с инвариантом преобразований Лоренца — интервалом ΔS — соотношением:

$$\boxed{c\,\Delta\tau = \Delta S = \sqrt{\Delta x_\mu \Delta x^\mu}}$$

Элементарные частицы живут и "умирают" (распадаются) по собственному времени. В этом нас убеждает история мюона (мю-мезона) — частицы, подобной электрону, но ~ 200 раз более тяжелой. Мюон нестабилен и имеет время жизни (период полураспада) $\Delta\tau \cong 2\cdot 10^{-6}$ сек. За такой промежуток времени, даже двигаясь со скоростью света, мюон пролетает ~ 600 м. Однако впервые наблюдали мюоны в 1936 г. при изучении космических лучей.

Эти мюоны рождались в верхних слоях атмосферы под действием космического излучения и успевали долететь до Земли, прежде чем умереть. Дело было в том, что при их ультрарелятивистской скорости $|\vec{v}| \cong 0{,}995c$ на Земле за время их жизни проходило время $\Delta t \cong 10\Delta\tau$.

Парадокс близнецов: Из двух близнецов одного оставляют на Земле, а второго отправляют путешествовать на быстрой ракете. По возвращении выясняется, что летавший на ракете близнец моложе того, который его ждал на Земле. /Этот эффект проверялся и был подтвержден с использованием пары синхронизированных атомных часов/.



Раз близнецы прожили разное время, значит системы отсчета, в которых они жили, неэквивалентны. Неудивительно, ведь летавший на ракете близнец жил в сильно неинерциальной системе.

Как посчитать время, которое он прожил?

Оказывается, в каждый момент времени он

живет по часам сопутствующей ~~24~~

ему инерциальной системы (это еще одно удачное физическое предположение). Его время $d\tau$ в сравнении с земным dt течёт как

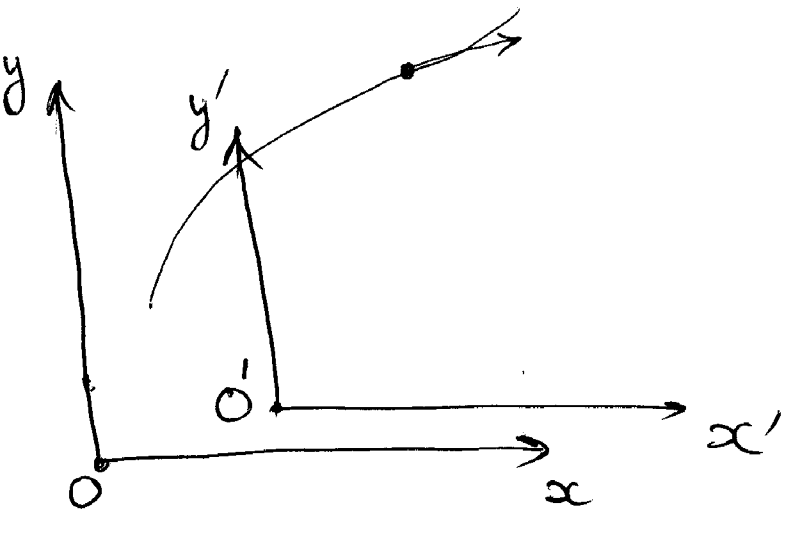
$$\boxed{d\tau = \sqrt{1-\vec{v}^2(t)/c^2}\,dt,} \quad (\diamond)$$

и следовательно, к моменту возвращения T он постареет на

$$\tau = \int_0^T \sqrt{1-\vec{v}^2(t)/c^2}\,dt < T$$

(В) Закон преобразования скоростей.

Рассмотрим движение частицы в двух системах O и O', движущихся друг относительно друга со скоростью V (в направлении $\vec{Ox^1}$) см. Рис.



Относительно системы O частица движется со скоростью $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, а относительно O' — со скоростью $\vec{v}' = (v_x', v_y', v_z')$

Выясним, как эти скорости $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ и $\vec{v}' = \frac{d\vec{x}'}{dt'}$ связаны. Вычислим, используя (★):

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx - V dt}{\cancel{\sqrt{1-V^2/c^2}}}}{\frac{dt - V/c^2\, dx}{\cancel{\sqrt{1-V^2/c^2}}}} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_x},$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\frac{dt - V/c^2\, dx}{\sqrt{1-V^2/c^2}}} = \frac{v_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - \frac{V}{c^2} v_x},$$

аналогично

$$v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}$$

Преобразование нелинейно, и этим очень неудобно. Чтобы получить удобное линейное преобразование будем вычислять скорость движения частицы во всех системах отсчёта по отношению к одному выделенному времени — ее собственному. Более того, обезразмерим скорость частицы, поделив ее на c:

$$\boxed{u^\mu = \frac{1}{c}\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{ds} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}, \frac{v^i/c}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}\right)}$$

Здесь мы учли связь (✧) $d\tau$ и dt,

чтобы выразить 4-вектор скорости частицы в системе отсчёта O — u^μ — через 3-вектор $\vec{v}$ ее обычной скорости в этой системе.

Так как ds — инвариант преобразований Лоренца, то u^μ преобразуется так же как dx^μ

$$\boxed{u'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu,}$$

то есть называть u^μ 4-вектором законно.

Нетрудно выразить 3-вектор $\vec{v}$ через u^μ:

$$\boxed{v^i = c\,\frac{u^i}{u^0}.}$$

Важно отметить, что не все компоненты 4-скорости независимы:

$$\boxed{u^\mu u_\mu = 1} \quad (\text{убедитесь}) \quad (\dagger)$$

<u>Задание</u>: Получите выражения для компонент 4-вектора ускорения $w^\mu = \frac{du^\mu}{ds}$ ~~через~~ в терминах компонент 3-вектора $a^i = dv^i/dt$, и выведите формулы преобразования Лоренца для ускорения $\vec{a}$.

§ 4 Модель свободной релятивистской частицы

Свободная частица не должна различать инерциальные системы отсчёта ⟹ ее действие должно быть инвариантно относительно преобразований Пуанкаре (*) (Лоренц + трансляции).

Движение точечной частицы полностью описывается заданием ее координат x^μ. Следовательно, простейший выбор для ее действия

$$S[x^\mu] = -\alpha \int_a^b ds ,$$

где α – коэффициент, a и b – начальная и конечная точки движения частицы, $ds = c\,d\tau$ – её интервал = $c\cdot$ (её собственное время).

~~Параметризуя~~ Выражая ds в терминах координат $\vec{x}(t)$ и времени t какой-то выбранной инерциальной система отсчёта, имеем

$$S[\vec{x}(t)] = -\alpha c \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2(t)}{c^2}}\, dt$$

Разложив это действие в ряд по $\dot{\vec{x}}^2/c^2$ и потребовав справедливости нерелятивистской

формула
$$S' = const + \int_{t_a}^{t_b} \frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2} dt + O\left(\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}\right)$$
мы получаем выражение для параметра α в терминах привычной массы: $\alpha = mc$.

Окончательно, лагранжиан свободной релятивистской частицы:
$$\boxed{L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}} \qquad (A)$$

Он инвариантен относительно трансляций координат x^i и времени t. Соответствующие законы сохранения:
$$P^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{m\dot{x}^i}{\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2/c^2}}, \qquad (B)$$
$$E = \dot{x}^i\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2/c^2}}.$$

Очевидно, релятивистская частица, как и нерелятивистская движется в пространстве по прямой с постоянной скоростью $\dot{x}^i$.

Более интересным следствием формул (B) является выражение наблюдаемых (и измеряемых) характеристик частицы, E и $\vec{p}$ в термиках её кинематических характеристик ($\vec{x}$). 29

Вспоминая о 4-векторе скорости частицы u^μ, замечаем:

$$p^i = mcu^i,$$
$$E = mc^2 u^0,$$

и можно из E и $\vec{p}$ составить 4-вектор, называемый 4-импульсом частицы

$$\boxed{p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = mcu^\mu} \qquad (C)$$

У этого наблюдения два важных следствия:

---

1) p^μ — 4-вектор, а значит для его компонент мы знаем преобразования Лоренца. В частности, при лоренцевых бустах вдоль оси $O\vec{x}$ (★)

$$\boxed{\begin{aligned} E' &= \frac{E - Vp^1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ p'^1 &= \frac{p^1 - \frac{V}{c^2}E}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{aligned}} \qquad (D)$$

Мы теперь знаем, как связаны наши измерения энергии и импульса частицы в разных системах координат.

2) Условие (†) для 4-скоростей u^μ в терминах p^μ принимает вид

$$\boxed{p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = m^2c^2}, \qquad (E)$$

откуда следует зависимость энергии свободной частицы от её 3-импульса:

$$\boxed{E = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2}} \qquad (E')$$

В нерелятивистском пределе получаем:

$$E = mc^2 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \ldots$$

Оказывается, у релятивистской частицы, помимо кинетической энергии, есть нечто, называемое энергией покоя $\boxed{E_0 = mc^2}$. Эта энергия проявляет себя в экспериментах по рождению частиц. Разница

$T = E - E_0$ называется кинетической энергией релятивистской частицы.

Наконец, в релятивистском мире существуют безмассовые частицы — фотоны. Для них связь энергии с импульсом также предсказывается формулой (E'): если $m = 0$, то $\boxed{E = c|\vec{p}|}$