Лекция 6

Канонические преобразования

Одним из основных преимуществ лагранжевой механики перед ньютоновской является независимость формализма от выбора системы координат. В лагранжевой механике формализм не меняется при заменах координат вида

$$q_i \mapsto Q_i = Q_i(q,t),$$

называемых <u>точечными</u>. Этот факт становится очевидным при выводе уравнений движения из принципа наименьшего действия.

В гамильтоновой механике возможности замены координат еще шире. Можно рассмотреть замены координат вида

$$(*) \qquad (q_i, p_i) \mapsto \left(Q_i(q,p,t),\ P_i(q,p,t)\right),$$

однако не все такие (обратимые, гладкие) замены оставляют формализм неизменным. Чтобы выделить семейство замен координат $(*)$, оставляющих инвариантным гамильтонов формализм, и называемых <u>каноническими</u>, сначала сформулируем принцип наименьшего действия в гамильтоновом формализме.

§1. Принцип наименьшего действия в гамильтоновой формулировке.

Перепишем действие в терминах гамильтоновых переменных q_i, p_i:

$$\boxed{S[q_i(t), p_i(t); t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} \{p_i(t)\dot{q}_i(t) - H(q(t), p(t), t)\} dt}$$

Под интегралом стоит выражение $L(q, \dot{q}, t)$ через H.

Мы хотим вывести уравнения Гамильтона, варьируя S, а их в 2 раза больше, чем уравнений Эйлера-Лагранжа. Значит и независимых вариаций должно быть в 2 раза больше. Это $\delta q_i(t)$ и $\delta p_i(t)$ – именно поэтому мы поставили $p_i(t)$ вдобавок к $q_i(t)$ в аргумент S.

Заметим, что независимость $\delta q_i(t)$ и $\delta p_i(t)$ означает, что при вариации S мы забываем о связи, накладываемой преобразованием Лежандра: $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. Вдобавок, мы будем трактовать $\dot{q}_i(t)$, присутствующие в действии, как $\frac{dq_i(t)}{dt}$ (а не как $\dot{q}_i(q, p, t)$ – выражения для скоростей, получающееся из обращения преобразования Лежандра). По большому счёту, все эти наши допущения оправдываются получением правильных динамических уравнений при варьировании S.

Наконец, при постановке вариационной задачи надо оговорить поведение $\delta q_i, \delta p_i$ на границах. Мы полагаем

$$\boxed{\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0\,, \quad \delta p_i(t_{0,1}) - \forall}$$

не фиксированы.

Варьируем:

$$\delta S[q(t), p(t) \ldots] = \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta p_i \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) - \delta q_i \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{d}{dt} (\delta q_i p_i) \right)$$

— здесь мы применили приём интегрирования по частям к члену $p_i \delta \dot{q}_i$.

Последнее слагаемое в правой части зануляется в силу граничных условий на δq_i, а первые два дают правильные уравнения Гамильтона — порядок!

Замечание 1: Связь импульсов и скоростей (т.е. соотношение Лежандра) восстанавливается при варьировании как условие экстремальности действия: она содержится в одном из уравнений Гамильтона: $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$.

Замечание 2: Принцип наименьшего действия в лагранжевой формулировке предполагает варьирование произвольной функции $L(q, \dot{q}, t)$. В гамильтоновой формулировке варьируется весьма специальная функция $L(q,\dot q,p,t) = \dot q_i p_i - H_i(q,p,t)$, которая линейна по переменным $\dot q_i$, и вообще не зависит от $\dot p_i$. Канонические преобразования $(q_i, p_i) \mapsto (Q_i, P_i)$ должны сохранять такой специальный вид функции $L(q,\dot q,p,t)$, именно поэтому они не могут задаваться произвольными функциями $Q_i(q,p,t)$ и $P_i(q,p,t)$. Чтобы определить явно допустимые канонические преобразования, удобно взглянуть на действие с другой точки зрения.

§2. Действие, как функция граничных условий.

Подставим в действие траекторию *действительного* движения системы $q_i(t)$, $p_i(t)$, и рассмотрим его как функцию конечных и начальных точек траектории и моментов времени: $\boxed{S(q_{0i}, t_0; q_i, t)}$, где $q_{0i} = q_i(t_0)$, $q_i = q_i(t)$. Будем вычислять дифференциал этой функции:

$$dS(q_0, t_0; q, t) = \frac{\partial S}{\partial q_{0i}} dq_{0i} + \frac{\partial S}{\partial t_0} dt_0 + \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial S}{\partial t} dt$$

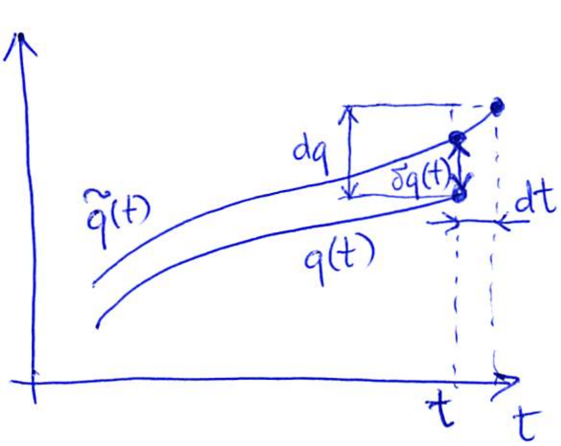
Явное вычисление даёт:

$$dS = \int_{t_0+dt_0}^{t+dt} L(\tilde q,\dot{\tilde q},t)\,dt - \int_{t_0}^{t} L(q,\dot q,t)\,dt =$$

Здесь $\tilde q_i(t)$ – траектория движения системы из $(q_0+dq_0,\ t_0+dt_0)$ в $(q+dq,\ t+dt)$

Здесь $q_i(t)$ – траектория движения системы из (q_0, t_0) в (q, t)

$$= L(q_i,\dot q_i,t)\,dt - L(q_{0i},\dot q_{0i},t_0)\,dt_0 + \int_{t_0}^{t} \underbrace{\Big(L(\tilde q,\dot{\tilde q},t) - L(q,\dot q,t)\Big)}_{=\ \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta \dot q_i} dt$$



где $\delta q_i(t) = \tilde q_i(t) - q_i(t) =$

$= \big(\tilde q_i(t+dt) - q_i(t)\big) - \big(\tilde q_i(t+dt) - \tilde q_i(t)\big)$

$= dq_i - \dot q_i\,dt$, см. рис.

$$= L(q,\dot q,t)\,dt - L(q_0,\dot q_0,t_0)\,dt_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta q_i\Big|_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t} \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\right)}_{=\ 0}\delta q_i\,dt$$

0 т.к. мы на реальной траектории движения.

$$= p_i\,dq_i - p_{0i}\,dq_{0i} + \Big(\underbrace{L - \dot q_i\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}}_{H(q,p,t)}\Big)dt -$$

$$- \Big(\underbrace{L(q_0,\dot q_0,t_0) - \dot q_{0i}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}}_{H(q_0,p_0,t_0)}\Big)dt_0.$$

Отсюда заключаем:

$$(1)\quad \boxed{p_i = \frac{\partial S(q_0,t_0;q,t)}{\partial q_i},\quad H(q,p,t) = -\frac{\partial S}{\partial t},\quad p_{0i} = -\frac{\partial S}{\partial q_{0i}},\quad H(q_0,p_0,t_0) = \frac{\partial S}{\partial t_0}}$$

Или, в виде формулы для дифференциала

$$(1')\quad \boxed{dS(q,t,q_0,t_0) = p_i dq_i - H(q,p,t)\,dt - p_{0i}\,dq_{0i} + H(p_0,q_0,t_0)\,dt_0}$$

Замечание 1: Из формул (1) можно составить дифференциальное уравнение (нелинейное, в частных производных) для функции $S(q_0,t_0;q,t)$

$$(2)\quad \boxed{H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = -\frac{\partial S}{\partial t}}$$

Здесь мы рассматриваем S как функцию q_i и t, зафиксировав начальные данные q_{0i}, t_0.

Уравнение (2) называется уравнением Гамильтона-Якоби. Решать его, конечно, не легче, чем решать уравнения Гамильтона, но такой взгляд на динамику тоже бывает полезен, например, при изучении предельного перехода от квантовой механики к классической. Мы более обсуждать уравнения Гамильтона-Якоби не будем, а используем формулы (1), (1') для вывода формул канонических преобразований.

§ 3 Канонические преобразования.

Итак, мы ищем такую замену переменных (конечно, обратимую!)

(3a) $(q_i, p_i) \longmapsto (Q_i(q,p,t),\ P_i(q,p,t))$,

и такую замену Гамильтониана

(3в) $H(q,p,t) \longmapsto \tilde{H}(Q,P,t)$,

что уравнения Гамильтона в новых и старых переменных имеют одинаковые решения. То есть, если $(q_i(t), p_i(t))$ — решение ур-ний Гамильтона для H в старых переменных, то $(Q_i(q(t),p(t),t),\ P_i(q(t),p(t),t))$ — решение ур-ний Гамильтона для $\tilde{H}$ в новых переменных. И наоборот.

Такое случается, если "старое" и "новое" действия

$$S[q(t),p(t)] = \int (p_i dq_i - H\,dt),$$

и $$\tilde{S}[Q(t),P(t)] = \int (P_i dQ_i - \tilde{H}\,dt)$$

отличаются друг от друга на величину, которая не даёт вклада в вариации δS и $\delta\tilde{S}$. Вспомним, что в лагранжевом формализме такая величина имела вид $\int \frac{d\lambda(q(t),t)}{dt} \cdot dt$

В гамильтоновом формализме аналогом будет
$$\int \frac{dF(q(t), Q(t), t)}{dt}\, dt.$$
Мы допустили у F зависимость от $q_i(t)$ и $Q_i(t)$, т.к. вариации δq_i и δQ_i зануляются на концах траекторий — таковы условия гамильтонова принципа наименьшего действия. Поэтому мы не можем вставить в F зависимости от p_i и P_i — для них вариации произвольны.

Заметим, что в лагранжевом случае не имело смысла рассматривать $\lambda(q, Q, t)$, т.к. $Q_i(q, t)$ — однозначно определялись по q_i. В гамильтоновом же случае $Q_i(q, p, t)$ зависит не только от q_i.

Итак, условие каноничности преобразований (3а,б):

$$(4)\quad \boxed{S[q(t), p(t)] - \tilde{S}[Q(t), P(t)] = \int dF(q(t), Q(t), t)}$$

Чтобы выяснить, какие ~~ещё~~ ограничения на вид $Q(q,p,t)$ и $P(q,p,t)$ накладываются условием (4), рассмотрим действия S и $\tilde{S}$ как <u>функции</u> конечных точек траекторий q_i, Q_i и конечного времени t, посадив S и $\tilde{S}$ на <u>реальные траектории</u>

движения, и зафиксировав начальные точки q_0, Q_0 и время t_0. Вычислим в этих предположениях дифференциал (4) (см. (1′) в §2):

$$dS(q,t) - d\tilde{S}(Q,t) = dF(q,Q,t)$$

$$\Downarrow$$

$$(5)\quad \boxed{p_i\, dq_i - P_i\, dQ_i + (\tilde{H} - H)\, dt = dF(q,Q,t),}$$

то есть

$$(5')\quad \boxed{\begin{array}{l} p_i = \dfrac{\partial F(q,Q,t)}{\partial q_i}, \quad P_i = -\dfrac{\partial F(q,Q,t)}{\partial Q_i} \\ \tilde{H} = H + \dfrac{\partial F}{\partial t} \end{array}}$$

Как пользоваться формулами (5′) для построения канонических преобразований? Вот как:

* Выбрать $\forall$ (достаточно гладкую) функцию $F(q,Q,t)$
* Обратить первое из соотношений (5′) относительно Q_i: $\quad p_i = \dfrac{\partial F(q,Q,t)}{\partial q_i} \Longrightarrow Q_i = Q_i(q,p,t)$

  Тут предполагается, что обратить можно, то есть F удовлетворяет условию, что $\dfrac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial Q_j}$ — обратима.
* Подставить полученное выражение для $Q_i(q,p,t)$ в формулу $P_i = -\dfrac{\partial F}{\partial Q_i}$ и получить $P_i(q,p,t)$

* Наконец, вычислить $\tilde{H}(Q,P,t)$, воспользовавшись последней формулой из (5').

Def: Функция $F(q,Q,t)$ в формулах (5') называется производящей функцией канонических преобразований (1 рода).

Следствие 1: Канонические преобразования не меняют вида скобок Пуассона.

Для канонических переменных они имеют вид:

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \quad , \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

и

$$\{Q_i Q_j\} = \{P_i, P_j\} = 0 \quad , \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}$$

и являются следствием Гамильтонова вида уравнений движения для обоих наборов переменных (мы ~~так~~ определяем скобки Пуассона глядя на ур-ния движения).

Для произвольных функций $G_1(Q,P)$ и $G_2(Q,P)$ имеем соотношение

$$(6) \quad \boxed{\{G_1, G_2\}_{(Q,P)} = \{G_1, G_2\}_{(q,p)}},$$

где в правой части подразумевается

$$G_i = G_i\big(Q(q,p,t), P(q,p,t)\big) = G_i(q,p,t)$$

Условие (6) следует из канонического вида скобок Пуассона для пар (q, p) и (Q, P), а также правила Лейбница, позволяющего выразить скобки Пуассона произвольных функций через скобки Пуассона канонических переменных.

Замечание. Иногда канонические ~~пер~~ преобразования определяют как не меняющие вида скобок Пуассона.

Следствие 2: Эволюция гамильтоновой системы является каноническим преобразованием

Доказательство: Сравнивая формулы $(5')$ и (1), замечаем, что если в качестве производящей функции канонического преобразования выбрать функцию действия:

$$\boxed{F(q, Q, t) = S(q_0, t_0; q, t)\Big|_{q_{0i} = Q_i}}$$

то соответствующее каноническое преобразование будет переводить канонические переменные (q_i, p_i) в момент времени t в переменные

$$(Q_i, P_i) = (q_{0i}, p_{0i})$$ — являющиеся значениями $q_i(t), p_i(t)$ в момент времени t_0

$\square$.

§ 4 Теорема Лиувилля

Заметим, что в качестве производящих для канонических переменных можно использовать и функции других наборов переменных. Действительно, рассмотрим преобразование $F(q,Q,t) \mapsto \Phi(q,P,t)$

$$\boxed{\Phi(q,P,t) = F(q,Q,t) + Q_i P_i} \tag{7}$$

где подразумевается, что $Q_i = Q_i(q,P,t)$ выражается из второй формулы $(5')$: $P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}$. Преобразование (7) есть (с точностью до знака) преобразование Лежандра.

Для функции Φ имеем аналог (5):

$$\boxed{p_i dq_i + Q_i dP_i + (\tilde{H} - H)dt = d\Phi(q,P,t)} \tag{8}$$

то есть

$$\boxed{p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}} \tag{8'}$$

Функция $\Phi(q,P,t)$ называется производящей функцией (2 рода) для канонических преобразований $(8')$.

<u>Упражнение</u>: выведите формулы канонических преобразований для производящих функций 3-го и 4-го родов:

$$\Psi(p,Q,t) = -q_i p_i + F(q,Q,t)\Big|_{q(p,Q,t)}$$

$$\Lambda(p,P,t) = -q_i p_i + Q_i P_i + F(q,Q,t)\Big|_{\substack{q(p,P,t)\\ Q(p,P,t)}}$$

В терминах производящих функций 2 рода удобно доказывается следующая важная

<u>Теорема</u> (Лиувилль) Канонические преобразования сохраняют объём в фазовом пространстве, или, что то же самое, форму объема $(dq_1\wedge\ldots\wedge dq_n)\wedge(dp_1\wedge\ldots\wedge dp_n)$.

<u>Доказательство</u>: Нам ~~необходимо~~ достаточно убедиться, что якобиан преобразования $(q_i,p_i)\leftrightarrow(Q_i,P_i)$ равен 1:

$$J=\left|\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)}\right| = 1.$$

Нам будет удобно осуществить это преобразование в 2 этапа $(Q_i,P_i)\mapsto(q_i,P_i)\longmapsto(q_i,p_i)$

При этом

$$J = \left|\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,P)}\right| \cdot \left|\frac{\partial(q,P)}{\partial(q,p)}\right| = \left|\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,P)}\right| \Big/ \left|\frac{\partial(q,p)}{\partial(q,P)}\right|.$$

Вычислим:

$$\left|\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,P)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} & 0 \;'' \frac{\partial Q_i}{\partial P_j} \\ \frac{\partial P_i}{\partial q_j} & \delta_{ij} \;'' \frac{\partial P_i}{\partial P_j} \end{vmatrix} = \left|\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right| \overset{\text{см}(8')}{=} \left|\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_j \partial P_i}\right|,$$

$$\left|\frac{\partial(q,p)}{\partial(q,P)}\right| = \begin{vmatrix} \delta_{ij} \;'' \frac{\partial q_i}{\partial q_j} & \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \\ 0 \;'' \frac{\partial p_i}{\partial q_j} & \frac{\partial p_i}{\partial P_j} \end{vmatrix} = \left|\frac{\partial p_i}{\partial P_j}\right| \overset{\text{см}(8')}{=} \left|\frac{\partial^2 \Phi}{\partial P_j \partial q_i}\right|$$

откуда следует $J = 1$. $\square$

<u>Следствие 1</u>: Эволюция гамильтоновой системы сохраняет фазовый объём.

§ 5 Интегрируемость по Лиувиллю

В этом параграфе мы с помощью формализма канонических преобразований рассмотрим класс гамильтоновых механических систем, которые решаются в квадратурах.

Понятно, что систему тем легче решить, чем больше в ней интегралов движения. Сколько вообще интегралов движения (конечно, функционально независимых) может быть в системе с n степенями свободы? Есть утверждение формальное, что их должно быть $2n$ — по числу начальных данных (все q_{0i}, и p_{0i}). Однако q_{0i} и p_{0i} — "плохие" интегралы движения: они мало что говорят о форме траектории движения, утверждая ~~это~~ лишь, что она проходит через ~~начальную~~ точку (q_{0i}, p_{0i}) в момент времени t_0. Нам интересны интегралы движения, не зависящие явно от времени, и поэтому сообщающие нам нечто о траекториях движения системы в любой момент времени. Таких интегралов $< 2n$, иначе система просто стоит в фазовом пространстве.

Пример: Задача Кеплера. ~~Всего~~ У системы 6 степеней свободы: 2 материальных точки в $\mathbb{R}^3$.

Интегралы движения: $\vec{P}_{\text{центра масс}}$; E - энергия; $\vec{M}$ - момент вращения относительно центра масс - 7 штук. Есть еще вектор Рунге-Ленца $\vec{K}$, но вместе с ним уже будут функционально зависимые интегралы. Мы видим, что у задачи есть $> n=6$ функционально независимых интегралов движения. Однако среди них можно найти ровно 6 интегралов, имеющих нулевые скобки Пуассона друг с другом.

Это: $\vec{P}_{\text{центра масс}}$, $E = H(q,p)$, $\vec{M}^2$, и, скажем M_3

<u>Def</u>: Система с n степенями свободы называется <u>интегрируемой по Лиувиллю</u>, если в ней есть n функционально независимых интегралов движения в инволюции, т.е. таких $F_i(q,p)$ находящихся <u>в инволюции</u>, т.е. таких что

(9) $$\boxed{\{F_i, F_j\} = 0 \qquad i,j = 1\ldots n}$$

<u>Лемма</u>: В системе с невырожденной (скажем, канонической) Пуассоновой структурой не может быть более n функционально независимых интегралов движения в инволюции.

<u>Док-во</u>: Указание: дополните интегралы движения (рассматриваемые как независимые координаты на фазовом пространстве) до некоторой системы координат,

и убедитесь, что скобка Пуассона в этих координатах будет вырожденой, если только инволютивных интегралов $> n$. □

Теорема (Лиувилль) Уравнения движения интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системы в принципе разрешимы в квадратурах.

Замечание: Вставка "в принципе" означает, что зачастую реализовать решение в квадратурах не представляется возможным. Однако сам факт наличия такой возможности делает этот класс систем очень специальным. Именно для них (и для их квантовых аналогов) в современной мат. физике разработано несколько плодотворных подходов (метод пар Лакса, анзац Бете ....)

Доказательство: Идея состоит в том, чтобы подобрать такую каноническую замену координат

$$(q_i, p_i) \mapsto (Q_i, P_i),$$

в которой $\boxed{P_i = F_i(q,p)}$ — и есть n инволютивных интегралов движения (9). Будем искать для этой замены производящую функцию 2 рода $\Phi(q,P)$ (явной зависимости от времени не потребуется). Полагая, что выражения для P_i обратимы относительно p_i:

$$(10)\quad \boxed{P_i = F_i(q,p) \overset{\frac{\partial F_i}{\partial p_j}\text{ — невырожд.}}{\Longleftrightarrow} p_i = \varphi_i(q,P)}$$

сравним полученные для p_i выражения с формулами (8′):

$$p_i = \frac{\partial \Phi(q,P)}{\partial q_i}.$$

Очевидно, необходимыми условиями существования функции Φ являются:

$$(11)\quad \boxed{\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i}} \left(= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_i \partial q_j} \right)$$

Мы полагаем, что эти условия являются и достаточными (при каких предположениях о фазовом пространстве это так?).

Лемма: $\boxed{\{F_i, F_j\} = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i}}$

Доказательство: Рассмотрим набор тождеств

$$F_i(q, \varphi(q,P)) = P_i,$$

Дифференцируя его по q_j и P_j получаем формулы

$$\frac{\partial}{\partial P_j}: \quad (12') \quad \frac{\partial F_i}{\partial p_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial P_j} = \delta_{ij}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_j}: \quad (12'') \quad \frac{\partial F_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial F_i}{\partial p_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_j}$$

Вычислим скобки Пуассона $\{F_i, F_j\}$, воспользовавшись последним из этих соотношений:

$$\{F_i, F_j\} = \frac{\partial F_i}{\partial q_k}\frac{\partial F_j}{\partial p_k} - (i \leftrightarrow j) \overset{(12'')}{=} -\frac{\partial F_i}{\partial p_s}\frac{\partial F_j}{\partial p_k}\frac{\partial \varphi_s}{\partial q_k} - (i \leftrightarrow j) =$$

$$= \frac{\partial F_i}{\partial p_s}\frac{\partial F_j}{\partial p_k}\left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial q_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_s}\right).$$

Так как мы полагали матрицу $\| \partial F_i / \partial p_j \|$ обратимой (см. (12')), заключаем $\{F_i, F_j\} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \varphi_s}{\partial q_k} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_s}$. □

По доказанной лемме условие существования производящей функции $\Phi(q, P)$ выполнены (конечно, она не единственна). Выберем в качестве Φ

$$(13) \quad \Phi(q, P) = \int_\gamma \varphi_i(\tilde{q}, P)\, d\tilde{q}_i^{\xi},$$

где интеграл берётся вдоль $\forall$ траектории $\tilde{q}_i(t)$, $t \in [0, 1]$, начинающейся в некоторой (любой наперёд выбранной) точке $q_{*i} = \tilde{q}_i(0)$ и заканчивающейся в точке $q_i = \tilde{q}_i(1)$ (q_i – аргументы $\Phi(q, P)$). Условия (11) гарантируют, что интеграл (13) не зависит от вида траектории γ.

Выпишем теперь предписываемые производящей функцией $\Phi(q, P)$ выражения для P_i и Q_i: (см. (8'))

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = \varphi_i(q, P) \overset{(\text{см.}(10))}{\Longleftrightarrow} \boxed{P_i = F_i(q, p)}$$

как мы и хотели.

$$Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i} = \int\limits_\gamma \frac{\partial \varphi_j(\tilde{q}, P)}{\partial P_i} d\tilde{q}_j \overset{(\text{см. } (12'))}{=\!=}$$

$$= \int\limits_\gamma \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^{-1}_{ji} d\tilde{q}_j .$$

это матрица обратная к матрице $\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial p_j}$

Как видим, мы можем получить выражения для новых переменных Q_i, P_i, используя лишь дифференцирование, обращение матрицы и интегрирование вдоль γ. Гамильтониан для новых канонических переменных остаётся прежним: $\tilde{H} = H$ (т.к. $\partial\Phi/\partial t = 0$).

В новых переменных уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot{P}_i = \{P_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial Q_i} = 0$$

так как выбранные нами $P_i = F_i$ – интегралы движения.

Отсюда заключаем: $\boxed{H = H(P)}$ (не зависит от Q_i)

$$\Downarrow$$

$$\dot{Q}_i = \{Q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial P_i}$$ – есть функция только от P, а значит: $= C_i$

константа вдоль траектории движения.

Итак, уравнения движения явно интегрируются

$$\begin{cases} P_i = F_i(q, p) = \cancel{const_i}\, P_{i0} \\ Q_i = \dfrac{\partial H(P)}{\partial P_i} \cdot t + Q_{i0} \end{cases}$$

Итак, чтобы определить движение системы нам достаточно выразить в начальный момент времени $P_{i0} = F_i(q_0, p_0)$, $Q_{i0} = (\text{интеграл по } \gamma)$, и выразить $H(q,p)$ как функцию от $P_i = F_i(q,p)$. Все это "элементарные" операции обращения функций, интегрирования и дифференцирования, и это мы называем разрешимостью в квадратурах $\square$

<u>Def</u>: Полученные при доказательстве теоремы переменные P_i, Q_i — а) канонические

б) $P_i = \text{const}$:

$$Q_i = \underset{\uparrow}{\nu_i} t + \underset{\uparrow\text{константы}}{Q_{0i}}$$

называются <u>переменными угол</u> (Q_i) <u>-действие</u> (P_i)

<u>Пример</u>: Система гармонических осцилляторов:

$$H = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{p_k^2}{2} + \frac{\omega_k^2 q_k^2}{2} \right)$$

$\omega_k = \text{const}$ – <u>частоты осцилляторов.</u>

Система инволютивных интегралов движения

$F_i = \dfrac{p_i^2}{2\omega_i} + \dfrac{\omega_i q_i^2}{2}$ – пропорциональны энергиям отдельных осцилляторов $(F_i = E_i/\omega_i)$.

Явное решение в старых переменных q_i, p_i:

$$(14) \quad \begin{cases} p_i = \sqrt{2\omega_i F_i} \cos\theta_i(t), \\ q_i = \sqrt{\dfrac{2F_i}{\omega_i}} \sin\theta_i(t), \end{cases}$$

где $\quad \theta_i(t) = \omega_i t + \theta_{i0}$

Каноническая замена

$$(p_i, q_i) \mapsto (F_i, \theta_i)$$

даёт переменные угол-действие (проверьте скобки Пуассона F_i и θ_j!).

Геометрический смысл переменных угол-действие: по формулам (14) ~~…~~ траектории движения системы в её фазовом пространстве — набор эллипсов.

Переменные $\theta_i(t)$ — угловые параметры движения вдоль эллипсов

Переменные F_i пропорциональны площадям заметаемых эллипсов: $F_i = S_i/2\pi$.