Семинар 7

1. Рассмотрим проективную прямую $\mathbb{P}^1 = P(V)$, где V – двумерное векторное пространство над полем $\mathbf{k}$ (в нашем случае, если не оговорено противное, $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Для произвольного ненулевого вектора $x \in V$ через $< x >$ будем обозначать соответствующую точку в $\mathbb{P}^1$, то есть одномерное подпространство в V, натянутое на вектор x. Если e_0, e_1 – базис в V, то для произвольной точки $A =< x >$ ее *проективными координатами* $(x_0 : x_1)$ будем называть класс пропорциональности пары чисел (x_0, x_1) таких, что $x = x_0e_0 + x_1e_1$.

Покажите, что дополнение $U_0 = \mathbb{P}^1 \setminus \{< e_1 >\}$ к точке $< e_1 >$ в $\mathbb{P}^1$ можно отождествить с аффинной прямой $\mathbb{A}^1$ (над $\mathbf{k}$) посредством биекции

$$f : \ U_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^1, \ \ (x_0 : x_1) \mapsto x_1/x_0.$$

(В этом случае точка $< e_1 >$ называется *бесконечно удаленной точкой аффинной прямой* $\mathbb{A}^1$, и используется обозначение $< e_1 >= \infty$. При этом U_0 называется *аффинной картой* в $\mathbb{P}^1$.)

Указание. Для доказательства биективности f найдите обратное к f отображение.

2. Покажите, что для трех различных точек $E_0, E_1, E \in \mathbb{P}^1$ существует единственная проективная система координат $(x_0 : x_1)$ в $\mathbb{P}^1$, в которой

$$E_0 = (1 : 0), \ E_1 = (0 : 1), \ E = (1 : 1).$$

(Она называется *проективной системой координат, определяемой упорядоченной тройкой точек* E_0, E_1, E.)

3. *Двойным отношением четверки различных точек* $A, B, C, D \in \mathbb{P}^1$, где $A =< x >$, $B =< y >$, $C =< z >$, $D =< w >$, назовем число (точнее, элемент поля $\mathbf{k}$)

$$(ABCD) = (ABCD)_{xyzw} := \frac{\beta}{\alpha}\Big/\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\beta \cdot \alpha'}{\alpha \cdot \beta'},$$

где $\alpha, \beta, \alpha', \beta' y$ определены равенствами $z = \alpha x + \beta y, \ w = \alpha' x + \beta' y$.

а) Проверьте корректность этого определения, т.е. покажите, что если $< x >=< x' >$, $< y >=< y' >$, $< z >=< z' >$, $< w >=< w' >$, то $(ABCD)_{xyzw} = (ABCD)_{x'y'z'w'}$.

б) Покажите, что если E_0, E_1, E, X – четверка различных точек в $\mathbb{P}^1$, то имеет место следующее геометрическое истолкование двойного отношения: двойное отношение $(ABXC)$ есть координата точки X в аффинной карте $U_0 = \mathbb{P}^1 \setminus \{E_1\}$, в которой $E_0 = 0, \ E = 1$.

в) Выразите через двойное отношение $(ABXC)$ проективные координаты точки X в проективной системе координат, определяемой точками E_0, E_1, E.

г) Пусть даны четыре различные точки A, B, C, D в $\mathbb{A}^1$ с аффинными координатами a, b, c, d соответственно. Выразите через эти координаты двойное отношение $(ABCD)$.

4. Для векторов $\mathbf{x} = (x_0, x_1)$ и $\mathbf{y} = (y_0, y_1)$ в $\mathbf{k}^2$ введем обозначение $|\mathbf{xy}| := \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$. Пусть в $\mathbb{P}^1$ даны 4 различные точки A, B, C, D с координатами $(x_0 : x_1), \ (y_0 : y_1), \ (z_0 : z_1), \ (w_0 : w_1)$ в произвольной проективной системе координат, и пусть $\mathbf{x} = (x_0, x_1), \ \mathbf{y} = (y_0, y_1), \ \mathbf{z} = (z_0, z_1), \ \mathbf{w} = (w_0, w_1)$. Покажите, что:

а)

$$(ABCD) = \frac{|\mathbf{xz}|}{|\mathbf{xw}|}\Bigg/\frac{|\mathbf{yz}|}{|\mathbf{yw}|} = \frac{|\mathbf{xz}|}{|\mathbf{yz}|}\Bigg/\frac{|\mathbf{xw}|}{|\mathbf{yw}|},$$

б) правая часть последней формулы не зависит от выбора проективной системы координат в $\mathbb{P}^1$.

5. Рассмотрим группу S_4 перестановок различных точек A_1, A_2, A_3, A_4, нумеруемых числами 1,2,3,4 соответственно. Проверьте, что подгруппа в S_4 тех перестановок, которые сохраняющих двойное отношение $(A_1A_2A_3A_4)$, изоморфна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и состоит из перестановок $\mathrm{id} = (1234), \ (21)(43), \ (34)(12), \ (43)(21)$. (Она называется *четверной группой Клейна* V_4 или *группой диэдра* D_2.)