Семинар 8

1. Для векторов $\mathbf{x} = (x_0, x_1)$ и $\mathbf{y} = (y_0, y_1)$ в $\mathbf{k}^2$ введем обозначение $|\mathbf{xy}| := \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$. Пусть в $\mathbb{P}^1$ даны 4 различные точки A, B, C, D с координатами $(x_0 : x_1)$, $(y_0 : y_1)$, $(z_0 : z_1)$, $(w_0 : w_1)$ в произвольной проективной системе координат, и пусть $\mathbf{x} = (x_0, x_1)$, $\mathbf{y} = (y_0, y_1)$, $\mathbf{z} = (z_0, z_1)$, $\mathbf{w} = (w_0, w_1)$. Покажите, что:

а)

$$(ABCD) = \frac{|\mathbf{xz}|}{|\mathbf{xw}|} \Big/ \frac{|\mathbf{yz}|}{|\mathbf{yw}|} = \frac{|\mathbf{xz}|}{|\mathbf{yz}|} \Big/ \frac{|\mathbf{xw}|}{|\mathbf{yw}|},$$

б) правая часть последней формулы не зависит от выбора проективной системы координат в $\mathbb{P}^1$.

2. Рассмотрим группу S_4 перестановок различных точек A_1, A_2, A_3, A_4, нумеруемых числами 1,2,3,4 соответственно. Проверьте, что подгруппа в S_4 тех перестановок, которые сохраняющих двойное отношение $(A_1A_2A_3A_4)$, изоморфна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и состоит из перестановок $\mathrm{id} = (1234)$, $(21)(43)$, $(34)(12)$, $(43)(21)$. (Она называется *четверной группой Клейна* V_4 или *группой диэдра* D_2.)

3. *Проективной оболочкой* $\mathrm{Span}M$ подмножества M в $\mathbb{P}^n$ будем называть наименьшее подпространство в $\mathbb{P}^n$, содержащее M.

а) Покажите, что для любых точек $< v_1 >, .., < v_k > \in \mathbb{P}^n = P(V)$ верно равенство $\mathrm{Span}\{< v_1 >, .., < v_k >\} = P(\mathrm{Span}(< v_1 >, .., < v_k >))$, где $\mathrm{Span}(< v_1 >, .., < v_k >)$ – линейная оболочка векторов $v_1, ..., v_k \in V$.

б) Какова максимальная размерность проективной оболочки p различных точек проективного пространства?

4. *Проективным преобразованием* $f : \mathbb{P}^n \tilde{\to} \mathbb{P}^n$ проективного пространства $\mathbb{P}^n = P(V)$ называется всякое преобразование вида $f : \mathbb{P}^n \tilde{\to} \mathbb{P}^n$, $< v > \mapsto < \tilde{f}(v) >$, где $\tilde{f} : V \tilde{\to} V$ – линейное преобразование векторного пространства V. Таким образом, если $(x_0 : ...x_n)$ – проективные координаты в проективной системе координат $(e_0 : ...e_n)$, где $(e_0, ..., e_n)$ – некоторый базис в V, то проективное преобразование f задается формулой: $(... : x_i : ...) \mapsto (... : \sum_{j=0}^n a_{ij}x_j : ...)$, где (a_{ij}) – матрица линейного преобразования $\tilde{f} : V \tilde{\to} V$ в базисе $(e_0, ..., e_n)$.

а) Пусть $U_0 = \{(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1 | x_0 \neq 0\}$ – аффинная карта в $\mathbb{P}^1$. Найдите проективное преобразование $f : \mathbb{P}^1 \tilde{\to} \mathbb{P}^1$, при котором точки $1, 2, -1 \in U_0$ отображаются в точки $-1, 1, 2 \in U_0$ соответственно.

б) Пусть $U_1 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 | x_1 \neq 0\}$ – аффинная карта в $\mathbb{P}^2$. Найдите проективное преобразование $f : \mathbb{P}^2 \tilde{\to} \mathbb{P}^2$, при котором точки $(1, 0), (1, 1), (0, 1), (2, -1) \in U_1$ отображаются в точки $(1, 1), (2, 1), (0, 2), (3, 0) \in U_1$ соответственно.

5. а) Покажите, что в $\mathbb{P}^2$ любые две различные проективные прямые пересекаются в точке.

б) Найдите точку пересечения двух проективных прямых $l_1 : x_0 - 2x_1 + x_2 = 0$ и $l_2 : 3x_0 + x_1 - x_2 = 0$ в $\mathbb{P}^2$.

6. а) Найдите уравнение прямой в $\mathbb{P}^2$, проходящей через точки $(1 : 1 : -1)$ и $(-3 : 2 : 1)$.

б) Найдите точку пересечения прямых AB и CD, где $A = (1 : 1 : 2)$, $B = (2 : -1 : 1)$, $C = (-2 : -2 : 3)$, $D = (4 : 0 : -1)$. Нужно ли для этого находить уравнения прямых AB и CD?

в) Докажите, что точки $A = (1 : 1 : 2)$, $B = (3 : -1 : 2)$, $C = (11 : -1 : 10)$, $D = (3 : 7 : 10)$ в $\mathbb{P}^2$ лежат на одной проективной прямой, и найдите их двойное отношение.