Лекции 4-5

Гамильтонов формализм

§ 1. Преобразование Лежандра.

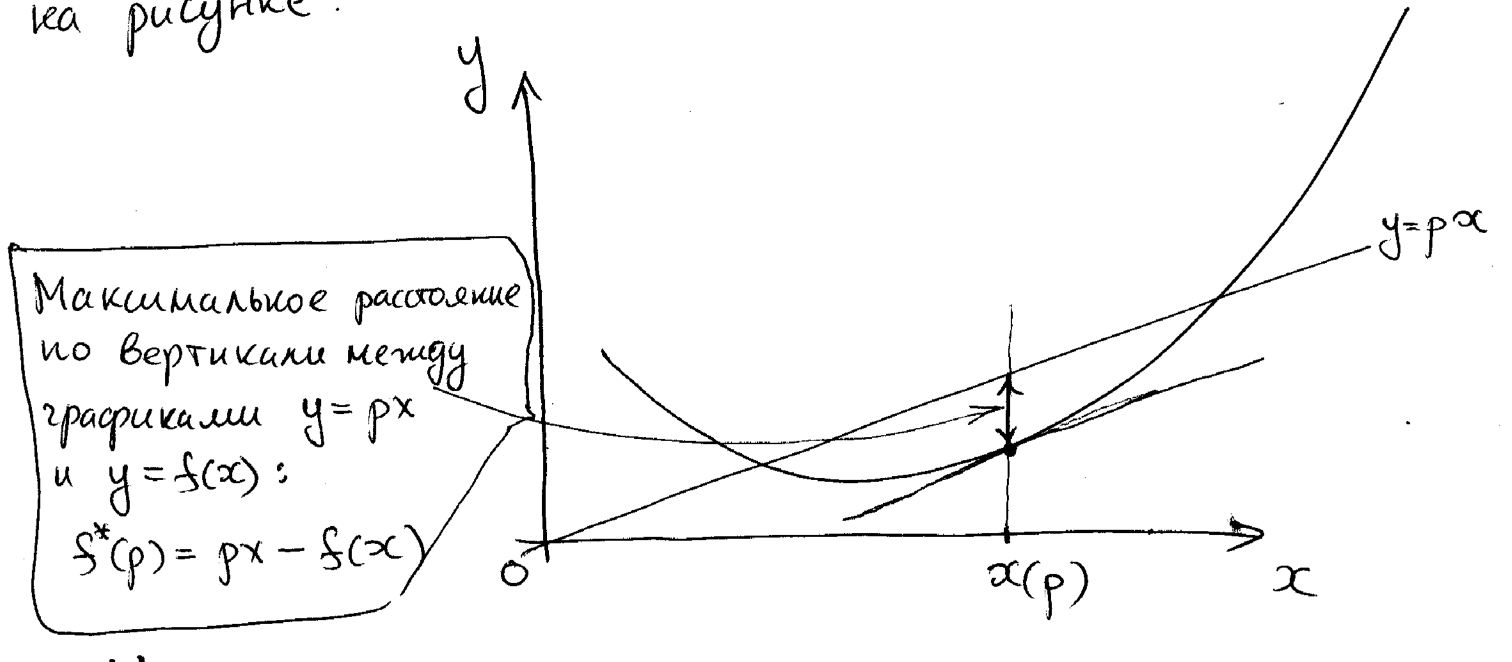
<u>Def</u>: Преобразование Лежандра отображает выпуклую функцию $f(x)$: $f''(x)>0$ в функцию f^* новой переменной p:

$$\boxed{f^*(p) = \{x\cdot p - f(x)\}\Big|_{x=x(p)}},$$

где $x(p)$ задаётся неявным условием:

$$\boxed{p = f'(x)}\ , \text{ т.е. } x(p) = (f')^{-1}(p)$$

Графическая интерпретация этого отображения приведена на рисунке:



<u>Упражнения</u>:

1.) Докажите, что $f^*(p)$ — выпуклая функция

2.) Убедитесь, что отображение Лежандра инволютивно: $f^{**} = f$.

В механике отображение Лежандра применяется к функции Лагранжа $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ по всем переменным $\dot{q}_i$:

$$(1) \quad \boxed{\dot{q}_i \longmapsto p_i := \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i}} \text{ — обобщённые импульсы.}$$

При этом образ Лагранжиана L называется гамильтонианом:

$$(2) \quad \boxed{H(q_i, p_i, t) := \left\{ \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t) \right\} \Big|_{\dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p, t)}}$$

Такое отображение возможно, если матрица гессиана

$$\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \text{ — невырождена и положительно}$$

определена (т.е. задаёт положительно определённую квадратичную форму).

Заметим, что $H(q, p, t)$ — знакомая нам функция энергии системы, только выраженная в терминах переменных $\{q_i, p_i\}$, а не $\{q_i, \dot{q}_i\}$.

В гамильтоновом формализме эволюция механической системы описывается на фазовом пространстве с координатами $\{q_i, p_i\}$ с использованием функции $H(q, p, t)$. Чтобы переписать уравнения Эйлера-Лагранжа в терминах $H(q,p,t)$ получим выражения для частных производных H:

С одной стороны:

$$dH(q,p,t) = \frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i + \frac{\partial H}{\partial t}dt.$$

С другой:

$$dH = d\left(\{\dot q_i p_i - L\}\Big|_{\dot q(q,p)}\right) = \dot q_i(q,p)\,dp_i +$$

$$+ d\dot q_i(q,p)\underbrace{\left(p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\Big|_{\dot q(q,p)}\right)}_{\equiv 0} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\Big|_{\dot q(q,p)}\cdot dq_i - \frac{\partial L}{\partial t}\Big|_{\dot q(q,p)}dt.$$

Получаем:

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}\Big|_{\dot q(q,p)},\quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot q_i(q,p),\quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}\Big|_{\dot q(q,p)}}$$

Подставляя в эти формулы уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) = \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i},$$

получаем систему дифуров 1-го порядка — <u>уравнения Гамильтона</u>:

$$(3)\quad \boxed{\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},\quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}}$$

Примеры:

1) Материальная точка массы m в потенциальном поле U:
$$L(q,\dot q) = \frac{m\dot q^2}{2} - U(q).$$

$$p = m\dot q$$
$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + U(q)$$

Уравнения Гамильтона: $\begin{cases} \frac{dq}{dt} = p/m \\ \frac{dp}{dt} = -dU/dq \end{cases}$

---

2) Свободная релятивистская частица: $L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot x^2}{c^2}}$

$$p = \frac{m\dot x}{\sqrt{1-\dot x^2/c^2}} \iff \dot x = \frac{cp}{\sqrt{p^2+m^2c^2}}$$

$$H = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\dot x^2}{c^2}}}\Bigg|_{\dot x(p)} = c\sqrt{p^2+m^2c^2}$$

Уравнения Гамильтона:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{cp}{\sqrt{p^2+m^2c^2}} & \text{— равномерное прямолинейное движение} \\ \frac{dp}{dt} = 0 \end{cases}$$

Заметим, что в гамильтоновом формализме ~~[illegible]~~ все формулы имеют смысл и при $m=0$:
$$H = c|p|,$$
$$\begin{cases} \left|\frac{dx}{dt}\right| = c & \text{— это фотон летит со скоростью света} \\ \frac{dp}{dt} = 0 \end{cases}$$

Замечание: В более математизированной формулировке обобщённые координаты q_i системы являются координатами на многообразии M — конфигурационном пространстве.

Фазовое пространство $\{q_i, \dot{q}_i\}$ лагранжева формализма является касательным расслоением TM, так как $\dot{q}_i$ — координаты в касательном пространстве к M в точке $\{q_i\}$.

Обобщенные импульсы p_i преобразуются двойственным образом по отношению к обобщенным скоростям $\dot{q}_i$ при заменах координат в M: $q_i \mapsto Q_i(q)$. Поэтому p_i естественно считать координатами двойственного пространства — кокасательного слоя $\Rightarrow$ фазовое пространство гамильтонова формализма является кокасательным расслоением T^*M.

---

§2 Скобки Пуассона

Рассмотрим эволюцию произвольной наблюдаемой $f(q,p,t)$: В силу уравнений Гамильтона

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right\}$$

Обратим внимание на члены, сгруппированные под знаком $\sum_i$ в правой части. Она сопоставляет паре функций f и H некоторую новую ф-цию на фазовом пространстве.

Def: Отображение $f(q,p),\ g(q,p) \longmapsto \{f,g\}(q,p) =$

$$(4)\quad \boxed{\{f,g\} := \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right)}$$

Называется скобкой Пуассона

С использованием скобки Пуассона уравнения Гамильтона выглядят так:

$$(3^*)\quad \boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}}$$

Свойства скобки Пуассона:

1. Кососимметричность: $\{f,g\} = -\{g,f\}$

2. Билинейность: $\{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha\{f,h\} + \beta\{g,h\}$,

   где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

   и аналогичная формула для второго аргумента.

3. Правило Лейбница: $\{fg, h\} = f\{g,h\} + g\{f,h\}$

4 Тождество Якоби

(5) $$\boxed{\{f\{g,h\}\}+\{g\{h,f\}\}+\{h\{f,g\}\}=0}$$

Неочевидным является лишь последнее свойство. Чтобы убедиться в нем, введем единообразные обозначения для координат фазового пространства:

$$\{z_a\}_{a=1\ldots 2n}: \quad q_i = z_i, \quad p_i = z_{i+n}, \quad i=1,\ldots,n.$$

В этих обозначениях

(4*) $$\boxed{\{f,g\} = \sum_{a,b} \partial_a f\, J_{ab}\, \partial_b g,}$$

где $\partial_a := \frac{\partial}{\partial z_a}$, $J = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{matrix} & 0 \end{array}\right)$ — $2n\times 2n$ матрица.

Заметим теперь, что все слагаемые в левой части тождества Якоби линейны по 2-м производным от функций f, g или h. Выделим члены, содержащие $\partial_a\partial_b f$. Такие члены присутствуют в

$$\{g,\{h,f\}\} : \quad (\partial_c g\, J_{cb})(\partial_d h\, J_{da})\, \partial_b\partial_a f$$

и в

$$\{h,\{f,g\}\} = -\{h,\{g,f\}\} : \quad -(\partial_d h\, J_{da})(\partial_c g\, J_{cb})\, \partial_a\partial_b f$$

Очевидно, эти члены в тождестве Якоби сокращаются. То же происходит и с членами, содержащими 2-е производные от g и h $\square$

Пока мы имеем описание скобок Пуассона в весьма специальных координатах $\{z_a\}=\{q_i, p_i\}$ на фазовом пространстве. Нас же интересует координатно независимое определение:

Def: Бинарная операция $f, g \mapsto \{f,g\}$, заданная на пространстве функций на многообразии M и удовлетворяющая свойствам 1 – 4, называется скобкой Пуассона. Многообразие M, снабжённое такой структурой, называется пуассоновым.

Rem.: Бескоординатное определение — несколько более общее, чем определение (4). В частности, оно работает и для нечётномерных многообразий. Соотношение двух определений выясняется теоремой Дарбу (см. ниже).

Рассмотрим скобку Пуассона в произвольной системе координат $\tilde{z}_a = \tilde{z}_a(q_i, p_i)$ $a=1\ldots 2n$.

Для координатных функций имеем:

$$\{\tilde{z}_a, \tilde{z}_b\} = \tilde{J}_{ab}(\tilde{z}) \leftarrow$$ кососимметричная матрица, чьи компоненты, вообще говоря, зависят от $\tilde{z}$

Для произвольных функций, в силу правила Лейбница:

$$\{f,g\} = \tilde{\partial}_a f\, \tilde{J}_{ab}(\tilde{z})\, \tilde{\partial}_b g, \text{ где } \tilde{\partial}_a = \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_a}$$

Вопросы: 1) Как выглядит преобразование $\tilde{J}_{ab} \mapsto \tilde{\tilde{J}}_{ab}$ при замене координат $\{\tilde{z}_a\} \mapsto \{\tilde{\tilde{z}}_a\}$?

2) Какие ограничения на $J_{ab}(\vec{z})$ накладывает тождество Якоби? (При доказательстве тождества Якоби в переменных $z_a = (q_i, p_i)$ мы пользовались постоянством матрицы J_{ab}).

Важные замечания.

* Именно в силу правила Лейбница ③ для определения скобки Пуассона достаточно задать ее на координатных функциях.
* Свойства ①, ②, ④ задают на функциях на фазовом пространстве структуру алгебры Ли.

Исходные координаты q_i, p_i фазового пространства играют выделенную роль в теории пуассоновых многообразий. Выпишем для них скобки Пуассона:

$$\boxed{\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \ , \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}}$$

Такие координаты называются канонически, или переменными Дарбу (см. теорему Дарбу ниже).

Первые практические результаты от введения пуассоновой структуры получаются при изучении скобок Пуассона интегралов движения.

Теорема Пуассона-Якоби: Скобка Пуассона двух интегралов движения есть интеграл движения.

Иными словами: Интегралы движения образуют пуассонову подалгебру в алгебре наблюдаемых

Док-во: Пусть f и g – интегралы движения, т.е.

$$0 = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}$$ и то же для g.

Вычислим $\frac{d}{dt}$ от $\{f, g\}$:

$$\frac{d}{dt}\{f,g\} = \frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} + \{\{f,g\},H\} =$$

$$= \underbrace{\left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\}}_{\text{т.к. частные производные } \frac{\partial}{\partial q_i} \text{ и } \frac{\partial}{\partial p_i} \text{ перестановочны с } \frac{\partial}{\partial t}} - \underbrace{\{\{g,H\},f\} - \{\{H,f\},g\}}_{\text{применили тождество Якоби}} =$$

$$= \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \{f,H\}\right), g\right\} + \left\{f, \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \{H,g\}\right)\right\} = 0. \quad \square$$

Можно было бы надеяться на то, что скобка Пуассона позволит получать новые, ранее неизвестные интегралы движения. Возможно, Пуассон на это и рассчитывал... Однако на деле теорема

Пуассона-Якоби оказалась важной по другой причине.

Утверждение: Алгебра Ли скобок Пуассона интегралов движения тождественна алгебре Ли группы симметрий, порождающей (по теореме Нётер) эти интегралы движения.

Мы не будем строго обосновывать это утверждение, а проиллюстрируем его на примере группы пространственно-временных симметрий - группы Пуанкаре. Более узко, мы рассмотрим трансляции (в пространстве и времени) и вращения, оставив в покое бусты.

* пространственным трансляциям вдоль оси x_i *)

$$\delta^{(i)} x_j = \varepsilon \delta_j^i$$

← малый параметр

по теореме Нётер соответствуют законы сохранения компонент импульса:

$$I^{(i)} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \boxed{p_i}$$

* временным трансляциям: $\delta^{(0)} x^0 = \varepsilon \Leftrightarrow \delta t = \frac{1}{c}\varepsilon$

соответствует закон сохранения энергии:

$$I^{(0)} = \frac{1}{c}(-E) = \boxed{-\frac{H}{c}} = \boxed{p_0}$$

*) Мы фактически работаем с одночастичной системой. Обобщение на многочастичные системы прямолинейно.

* <u>вращением вокруг осей x_i</u>

$$\delta^{(i)} x_j = \varepsilon (\Omega_i)_{jk} x_k = -\varepsilon \cdot \varepsilon_{ijk} x_k$$

Явные выражения для компонент Ω_i получены из формул на стр. 15 Лекций 2-3

отвечают сохраняющиеся компоненты момента импульса

$$M_i = (-\varepsilon_{ijk} x_k) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = \boxed{\varepsilon_{ijk} x_j \cdot p_k}$$

Вычислим скобки Пуассона этих интегралов движения:

* $\{p_i, p_j\} = 0$ – очевидно

* $\{p_i, p_0\} = 0$ – следует из трансляционной инвариантности Гамильтониана $\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$

* $\{M_i, p_j\} = \varepsilon_{ijk} p_k$ – тоже очевидно.

Для вычисления $\{M_i, M_j\}$ удобно сначала посчитать

$$\{M_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk} x_k,$$ после чего доказательство формулы

* $\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k$ – есть упражнение по применению правил Лейбница и формулы для тензора Леви-Чивита:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}$$

суммирование

Сравнивая полученные скобки Пуассона для p_i, p_0, M_i с коммутаторами соответствующих генераторов симметрий (см. стр. 16, 19.2 Лекций 2-3), убеждаемся в их тождественности.

<u>Rem</u>: Отметим, что всякая величина, X_i, преобразующаяся как вектор (или ковектор) при пространственных вращениях, имеет с M_i скобки Пуассона вида

$$\{M_i, X_j\} = \varepsilon_{ijk} X_k.$$

<u>Упражнения</u>:

1) Определите скобки Пуассона скалярных величин с M_i (Например $\vec{x}^2$, $\vec{p}^2$, $(\vec{x}\vec{p})$, $\vec{M}^2$ etc.)

2) Для свободной релятивистской частицы определите по теореме Нётер интегралы движения, отвечающие лоренцевым бустам, вычислите их скобки Пуассона с P_0, P_i, M_i и между собой, и убедитесь в их тождественности с алгеброй Ли группы Пуанкаре

<u>Выводы</u>: Мы пришли к такой картине гамильтоновой механики:

Гамильтонова механическая система определеется заданием многообразия $\mathcal{N}$ (обычно это кокасательное расслоение T^*M), пуассоновой структуры на нём $\{*,*\}$, и функции Гамильтона $H: \mathcal{N} \to \mathbb{R}$. Динамика задаётся уравнениями Гамильтона: $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}$. Симметрии системы закодированы в алгебре Ли скобок Пуассона её интегралов движения.

§ 3 Теорема Дарбу

Структура пуассоновых многообразий раскрывается теоремой Дарбу (Darboux).

<u>Теорема</u>: Пусть $(N, \{*,*\})$ – пуассоново многообразие размерности n. Пусть $z \in N$ – точка многообразия, $\{z_a\}_{a=1\dots n}$ – её координаты в некоторой (произвольной) системе координат. Предположим, что <u>ранг пуассоновой структуры</u>, определенный как

$$rk\|J_{ab}(z)\| \equiv rk\|\{z_a, z_b\}\| = 2r \leq n$$

<u>постоянен</u> в некоторой окрестности точки z.
Тогда в некоторой окрестности U точки z можно ввести <u>каноническую систему координат</u>:

$$\underline{x_i, p_i}, \quad i = 1,\dots,r, \quad \underline{\xi_\alpha}, \quad \alpha = 1,\dots,n-2r,$$

в которой скобки Пуассона имеют вид:

$$\{x_i, x_j\} = \{p_i, p_j\} = \{x_i, \xi_\alpha\} = \{p_i, \xi_\alpha\} = \{\xi_\alpha, \xi_\beta\} = 0,$$

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}.$$

Доказательства мы не приводим.

<u>Rem</u>: При "обычном" переходе от лагранжева к гамильтонову формализму вырожденных координат ξ_α, составляющих ядро скобки Пуассона, не возникает. Ситуация с наличием координат ξ_α возникает в <u>сингулярных системах</u>, где гессиан $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$ — вырожден и отображение Лежандра не взаимно-однозначное.

В случае, когда пуассонова структура вырождена, т.е. при наличии ξ_α, эволюция гамильтоновой механической системы происходит вдоль поверхностей уровня:

$$(6) \qquad \boxed{\xi_\alpha = C_\alpha} \leftarrow \begin{pmatrix}\text{выбранные} \\ \text{константы}\end{pmatrix}, \quad \alpha = 1,\dots,2n-r.$$

Это следует из: $\frac{d\xi_\alpha}{dt} = \{\xi_\alpha, H\} = 0 \Rightarrow \xi_\alpha = \mathrm{const}$ вдоль траекторий движения.

<u>Поверхности уровней ξ_α</u> — (6) являются чётномерными подмногообразиями N размерности $2r$. Наборы $\{x_i, p_i\}_{i=1,\dots,r}$ являются каноническими координатами на этих поверхностях, причем ограниченная на них пуассонова структура <u>невырождена</u>. Эти поверхности называются

симплектическими листами. Всё многообразие N расслаивается на симплектические листы.

Мы проиллюстрируем описанную картину на простом примере:

Скобки Пуассона $\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k$ задают пуассонову структуру на $\mathbb{R}^3$ (M_i, $i=1,2,3,$ — координатные функции в $\mathbb{R}^3$).

Ранг этой пуассоновой структуры равен 2 везде, кроме точки $(0,0,0)$, где он равен 0. Величина

$$\boxed{M^2 = \sum_i M_i^2}$$

принадлежит ядру скобки Пуассона и может быть выбрана координатной функцией $\boxed{\xi = M^2}$ в этом ядре (изучаем случай $M^2 \neq 0$).

Симплектические листы $\boxed{M^2 = C^2}$ — сферы радиуса C с центром в начале координат.

В качестве одной из канонических координат выберем $\boxed{p = M_1}$

Проверьте, что канонически сопряженной координатой в слое является

$$\boxed{x = \arcsin\frac{M_3}{\sqrt{M_2^2+M_3^2}} = \arcsin\frac{M_3}{\sqrt{C^2-M_1^2}}}$$

угол поворота вектора $\vec{M}$ вокруг оси $\vec{Ox}$ относительно оси $\vec{Oy}$.

§4 Добавление: Структуры, родственные скобке Пуассона.

A Гамильтоновы векторные поля

Векторное поле – $X = \varphi_a(z)\frac{\partial}{\partial z_a}$ – дифференциальный оператор первого порядка, действующий на функциях на многообразии. Векторные поля образуют алгебру Ли относительно операции их коммутирования.

Рассмотрим скобку Пуассона любой функции f с заданной функцией F

$$\{f, F\} = \partial_a f \, J_{ab}(z)\, \partial_b F$$

Ее можно рассматривать как действие векторного поля

$$\boxed{X_F = J_{ab}\,\partial_b F \cdot \partial_a}$$

на функцию f:

$$X_F \cdot f = \{f, F\},$$

Векторное поле вида X_F называется гамильтоновым. Уравнение Гамильтона для функций $f(z)$, не зависящих явно от времени, в этих обозначениях принимает вид:

$$\boxed{\frac{df}{dt} = X_H f}$$

(его решения – интегральные кривые X_H.)

Гамильтоновы векторные поля образуют подалгебру Ли в алгебре всех векторных полей, причём:

$$\boxed{[X_F, X_G] = -X_{\{F,G\}}}$$

Действительно: $[X_F, X_G]\cdot f = X_F(X_G\cdot f) - X_G(X_F\cdot f) =$

$$= X_F(\{f,G\}) - X_G(\{f,F\}) = \{\{f,G\},F\} - \{\{f,F\},G\} =$$

$$= \left(\begin{matrix}\text{в силу тожд.}\\ \text{Якоби}\end{matrix}\right) = -\{f\{F,G\}\} = -X_{\{F,G\}}\cdot f$$

(B) Симплектическая структура

Рассмотрим 2-форму на многообразии

$$\omega = \omega_{ab}(z)\, dz_a \wedge dz_b\,, \quad \omega_{ab} = -\omega_{ba}.$$

Любой паре векторных полей $X = \varphi_a(z)\partial_a$, $Y = \psi_a(z)\partial_a$ она сопоставляет функцию на многообразии:

$$\omega(X,Y) = \omega_{ab}(z)\varphi_a(z)\psi_b(z)$$

В случае, когда векторные поля гамильтоновы

$$\omega(X_F, X_G) = \omega_{ab}(z)\, J_{ac}(z)\, J_{bd}(z)\, \frac{\partial F}{\partial z_c}\frac{\partial G}{\partial z_d},$$

что напоминает скобку Пуассона $\{F,G\}$.

Действительно, в случае, если пуассонова структура невырождена (матрица $J_{ab}(z)$ обратима) мы можем подобрать 2-форму ω так, чтобы

$$\boxed{\omega(X_F, X_G) = \{F, G\}}$$

Очевидно, для этого надо положить

$$\underline{\omega_{ab}(z) = (J^{-1})_{ab}(z)},$$

Требования, налагаемые тождеством Якоби на $J_{ab}(z)$, при этом приводят к замкнутости 2-формы ω:

$$\boxed{d\omega = 0} \qquad \text{(Проверьте!)}$$

<u>Def</u>: Невырожденная замкнутая 2-форма на многообразии N называется <u>симплектической структурой</u>. При этом многообразие N называется <u>симплектическим</u>.

По всякой симплектической структуре можно восстановить <u>невырожденную</u> скобку Пуассона.

В канонических координатах симплектическая структура имеет вид $\boxed{\omega = \sum_i dq_i \wedge dp_i}$

Симплектические листы вырожденной скобки Пуассона являются симплектическими многообразиями.