

1. На плоскости¹ даны две прямые l_1 и l_2 , пересекающиеся в точке O .

а) Для фиксированной точки $A \notin l_1 \cup l_2$ с помощью линейки, которую запрещается прикладывать к точке O , постройте какую-нибудь точку X , отличную от точки O , такую, что прямая XA совпадает с прямой OA .

б) Для троек различных точек $A_1, B_1, C_1 \in l_1$ и $A_2, B_2, C_2 \in l_2$ рассмотрим проективное отображение $f : l_1 \rightarrow l_2$ такое, что $f(A_1) = A_2, f(B_1) = B_2, f(C_1) = C_2$. С помощью линейки найдите точку $f(O)$.

2. Дано проективное преобразование прямой $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, которое является инволюцией, то есть $f^2 = \text{id}$. Пусть f имеет неподвижные точки A и B . Докажите, что любая пара соответственных точек $X, Y = f(X)$ гармонически делит пару A, B .

3. На плоскости даны две прямые l_1 и l_2 и точка $O \notin l_1 \cup l_2$. Пусть $f : l_1 \rightarrow l_2, X \mapsto (OX) \cap l_2$ – центральная проекция. Докажите, что двойное отношение сохраняется при отображении f , то есть если A, B, C, D – различные точки на l_1 и $A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C), D' = f(D)$, то $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

4. На аффинной плоскости $\mathbb{A}^2$ параллельный перенос $T : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ задан указанием для данной точки P ее образа $Q = T(P)$. Дополним $\mathbb{A}^2$ до проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ посредством добавления к $\mathbb{A}^2$ несобственной прямой l_∞ , и продолжим T до проективного преобразования $\tilde{T} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$. С помощью линейки найдите образ $\tilde{T}(X)$ произвольной точки $X \in \mathbb{P}^2$. Укажите множество неподвижных точек преобразования $\tilde{T}$.

5. Определим двойное отношение четырех точек A, B, C, D на окружности как число $(ABCD) := \frac{\sin(\widehat{AOC})}{\sin(\widehat{AOD})} / \frac{\sin(\widehat{BOC})}{\sin(\widehat{BOD})}$, где O – произвольная точка окружности, а знак угла $\widehat{XOY}$ считается положительным, если направление кратчайшего поворота от луча OX к лучу OY идет против часовой стрелки. Нетрудно видеть, что это определение корректно, то есть не зависит от точки O . Покажите, что при стереографической проекции окружности на прямую двойное отношение сохраняется.

6. Пусть P, Q, R и P', Q', R' – две тройки различных точек на окружности ω и пусть $f : \omega \rightarrow \omega$ – проективное преобразование окружности такое, что $f(P) = P', f(Q) = Q', f(R) = R'$. С помощью линейки определите, имеет ли f неподвижные точки, и если имеет, то найдите их.

7. На окружности даны три точки A, B, C . Рассмотрим три новые точки A_1, B_1, C_1 на окружности такие, что пара AA_1 гармонически делит пару BC (то есть $(AA_1BC) = -1$, где двойное отношение точек на окружности определено в задаче 5), пара BB_1 гармонически делит пару AC , а пара CC_1 гармонически делит пару AB . Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке.

8. Дана окружность и точка на ней. С помощью линейки постройте касательную к окружности в этой точке. Проведите аналогичное построение, если вместо окружности взять эллипс, гиперболу или параболу.

9. Определим расстояние $d(A, B)$ между двумя точками A и B внутри окружности по формуле $d(A, B) := |\ln(ABXY)|$, где X и Y – точки пересечения прямой AB с окружностью. Пользуясь линейкой, для двух точек P и Q внутри окружности найдите середину отрезка $[PQ]$ в вышеуказанном смысле, то есть такую точку R на отрезке $[PQ]$, что $d(P, R) = d(R, Q)$.

10. Пусть O – точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$, а E, F – точки пересечения прямых AB и CD, BC и AD . Прямая EO пересекает стороны AD и BC в точках M и N , прямая FO пересекает стороны AB и CD в точках P и Q . Тогда прямые PN, MQ и EF пересекаются в одной точке.

¹Во всех задачах, если не оговорено противное, под плоскостью (соответственно, прямой) понимается вещественная проективная плоскость (соответственно, вещественная проективная прямая). В задачах, где встречается окружность, считается, что евклидова плоскость, в которой лежит окружность, продолжена до проективной плоскости добавлением несобственной проективной прямой. Точки несобственной прямой участвуют в построениях равноправно со всеми остальными точками. В частности, разрешается проводить прямые через точки несобственной прямой.