

Листок 4. Конические сечения.

Пусть F_1 и F_2 — две точки плоскости. *Эллипсом с фокусами F_1 и F_2* называется множество точек, сумма расстояний от которых до F_1 и F_2 постоянная величина, большая $|F_1F_2|$. Эта величина называется *большой осью* эллипса.

Пусть F_1 и F_2 — две различные точки плоскости. *Гиперболой с фокусами F_1 и F_2* называется множество точек, модуль разности расстояний от которых до F_1 и F_2 постоянная величина, большая 0 и меньшая $|F_1F_2|$.

Прямые, проходящие через центр гиперболы (середину F_1F_2) и не пересекающие ее, заполняют два вертикальных угла. Две прямые, содержащие стороны этих углов, называются *асимптотами* гиперболы. Гипербола с перпендикулярными асимптотами называется *равносторонней или прямоугольной*.

Пусть даны точка F и не проходящая через нее прямая l . *Параболой с фокусом F и директрисой l* называется множество точек, равноудаленных от F и l .

Эллипсы, гиперболы и параболы называются *кривыми второго порядка, коническими сечениями или кониками*.

Для любой коники существует такая прямая l , что для любой точки на конике отношение расстояний до фокуса и этой прямой постоянно (попробуйте это доказать!). Это отношение называется *эксцентриситетом* конической кривой, а прямые *директрисами*.

Касательной к эллипсу называется прямая, имеющая с эллипсом ровно одну общую точку. *Касательной* к параболе называется прямая, имеющая с параболой ровно одну общую точку и непараллельная ее оси симметрии. *Касательной* к гиперболе называется прямая, имеющая с гиперболой ровно одну общую точку и непараллельная ее асимптотам.

1. а) Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри эллипса до фокусов меньше, а от точки вне эллипса — больше длины большой оси.

б) Сформулируйте и докажите для гиперболы и параболы утверждения, аналогичные утверждению из пункта а).

2. Даны две окружности, каждая из которых лежит вне другой. Найдите геометрическое место центров окружностей,

а) касающихся двух данных одинаковым (внешним или внутренним) образом;

б) касающихся одной из данных внешним, а другой внутренним образом.

3. а) Оптическое свойство. Пусть прямая l касается эллипса в точке P . Докажите, что прямая l — это внешняя биссектриса угла F_1PF_2 .

б) Сформулируйте и докажите оптическое свойство для парабол и гипербол.

в) Пусть дано семейство коник с фокусами в F_1 и F_2 . Докажите, что любые гипербола и эллипс из этого семейства пересекаются под прямыми углами.

4. Пусть дана некоторая коника и ее хорда AB . Пусть касательные в точках A и B пересекаются в точке P .

а) Докажите, что если AB содержит F_1 , то PF_1 и AB перпендикулярны.

б) Докажите, что $\angle F_1PA = \angle F_2PB$.

в) Докажите, что $\angle AF_1P = \angle PF_1B$.

г) Докажите, что ГМТ P для всевозможных хорд AB , содержащих F_1 , — директриса коники.

5. Найдите геометрическое место точек, из которых эллипс виден под прямым углом, т.е. касательные из которой к эллипсу перпендикулярны.

6. Пусть парабола касается трех прямых, содержащих стороны треугольника.

а) Покажите, что ее фокус лежит на описанной окружности этого треугольника.

б) Покажите, что ее директриса проходит через ортоцентр треугольника.

в) Выведите из а), что описанные окружности треугольников, образованных четырьмя прямыми, пересекаются в одной точке (*точка Микеля*).

г) Выведите из б), что ортоцентры треугольников, образованных четырьмя прямыми, лежат на одной прямой (*прямая Обера*).

7. Докажите, что если вершины треугольника лежат на некоторой равносторонней гиперболы, то на этой гиперболы лежит также ортоцентр этого треугольника.

8*. На эллипс α накинута нить, которую натянули с помощью карандаша. Докажите, что карандаш при вращении вокруг α опишет другой эллипс, софокусный с данным эллипсом α .

Пусть в пространстве дана окружность и точка на прямой, проходящей через центр окружности перпендикулярно ее плоскости, отличная от самого центра. *Прямым круговым конусом* называется объединение прямых в пространстве, проходящих через данную точку и пересекающих данную окружность. Сами эти прямые называются *образующими* конуса, а данная точка — его *вершиной*. *Круговым цилиндром* называется объединение прямых в пространстве, пересекающих данную окружность и перпендикулярных ее плоскости. Сами эти прямые называются *образующими* цилиндра.

9. Сферы Данделена. а) Пусть плоскость α не параллельна образующим цилиндра. Рассмотрим две сферы, касающиеся цилиндра вдоль окружностей b_1 и b_2 соответственно и касающиеся плоскости α с разных сторон в точках F_1 и F_2 соответственно. Докажите, что сечение цилиндра плоскостью α — эллипс с фокусами F_1 и F_2 и большой осью, равной расстоянию между плоскостями окружностей b_1 и b_2 .

б) Сформулируйте и докажите аналогичные утверждения для сечений прямого кругового конуса плоскостями, не проходящими через его вершину.

10. а) Напишите уравнение эллипса и гиперболы в декартовой системе координат с началом в середине отрезка F_1F_2 и осью абсцисс, параллельной этому отрезку.

б) То же в полярной системе координат с центром в середине отрезка F_1F_2 и полярной осью, параллельной этому отрезку.

в) Напишите уравнение параболы в декартовой системе координат, у которой ось абсцисс — директриса, а ось ординат проходит через фокус.

г) Какая кривая (указать тип и применимые параметры — эксцентриситет, нахождение фокусов, директрис итп) задается уравнением $\rho = \frac{9}{5-4\cos\phi}$ в полярных координатах (ρ, ϕ) ?

Говорят, что уравнения $ax^2 + by^2 + c = 0$ и $ax^2 + by = 0$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$, имеют канонический вид.

11. С помощью поворота и параллельного переноса декартовой системы координат приведите данное уравнение к каноническому виду и укажите формулы перехода от исходной системы координат к полученной:

а) $xy - 3\sqrt{2}x - 8 = 0$;

б) $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 5y = 0$;

в) $x^2 + 8xy + 16y^2 + x + 4y - 16\frac{3}{4} = 0$.

Какие кривые (указать тип) задаются этими уравнениями?

В заключение сформулируем совсем непростую задачу.

12.* (Построение Кипера). На сторонах неравнобедренного треугольника ABC , как на основаниях, во внешнюю сторону построены подобные равнобедренные треугольники ABC' , BCA' , CAB' . Докажите, что прямые AA' , BB' и CC' пересекаются в одной точке K , и найдите геометрическое место точек K для данного треугольника ABC .

Указание. Если эта задача не получается, решите сначала задачи разделов 1–3 из <http://skopenkov.ru/courses/geometry-15.pdf>.