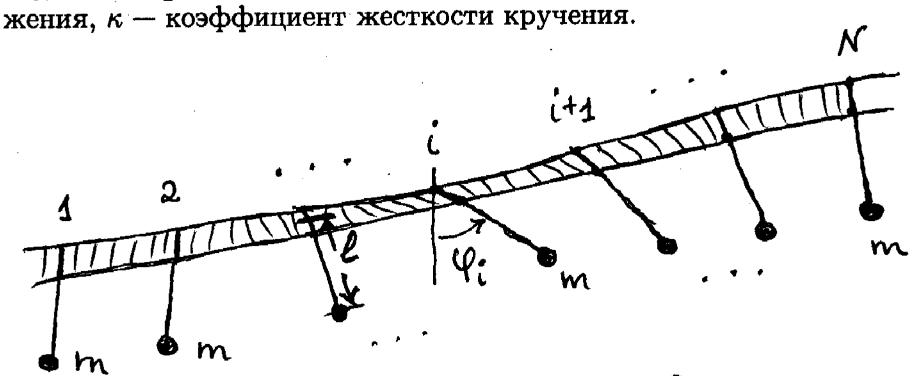
Механика и теория поля 2015.

Листок 5. Основные понятия теории поля.

1. На натянутом горизонтально резиновом жгуте закреплены на равных расстояниях друг от друга N одинаковых маятников. Маятники представляют собой невесомые стержни длины ℓ с точечной массой m на конце, и под действием силы тяжести они могут колебаться в плоскости перпендикулярной направлению жгута (см. рисунок). При этом жгут испытывает упругую деформацию кручения, потенциальная энергия которой имеет вид $U_{\text{круч.}} = \sum_i \frac{\kappa}{2}(\phi_{i+1} - \phi_i)^2$, где ϕ_i — угол отклонения i-го маятника от вертикального положения, κ — коэффициент жесткости кручения.



Запишите лагранжиан этой дискретной системы. Осуществите предельный переход $N \to \infty$ к непрерывной полевой модели, сделав разумные предположения о предельном поведении параметров ℓ, m и κ. Выпишите лагранжеву плотность и уравнение движения для полевой модели в общем случае и в пределе малых колебаний маятников.

2. Выведите и сравните уравнения движения для моделей свободной релятивистской струны, задаваемых действиями

а) $$S[X^\mu] = -\int d\tau d\sigma \sqrt{(\partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X_\mu)^2 - (\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu)(\partial_\sigma X^\nu \partial_\sigma X_\nu)},$$

б) $$S[X^\mu, g^{\alpha\beta}] = -\int d\tau d\sigma \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu.$$

Здесь $X_\mu(\tau, \sigma)$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ — координаты релятивистской струны в пространстве Минковского; τ, σ — координаты, параметризующие мировую поверхность струны; $g_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 0, 1$ (индекс 0 соответствует координате τ, индекс 1 – координате σ), — метрика на мировой поверхности струны; $g = \det ||g_{\alpha\beta}||$ (считается, что метрика индефинитна: $g < 0$).

(*) Постройте (частные) решения уравнений моделей а) и б).

3. Рассмотрим свободное вещественное скалярное поле с лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu \phi\, \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2}\,\phi^2.$$

Разложим решение уравнения Эйлера-Лагранжа на положительно и отрицательно частотные компоненты

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x), \qquad \phi^\pm(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^4}\, a^\pm(\vec{p})\, \frac{e^{\pm ipx}}{2p^0}\bigg|_{p^0 = \omega(\vec{p})}, \quad \omega(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}.$$

Выразите 4-вектор энергии-импульса поля P^μ в терминах функций $a^\pm(\vec{p})$. Вектор P^μ является интегралом по трехмерному пространству от соответствующей плотности

$$P^\mu = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x T^{0\mu},$$

где $T^{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса поля.

4. Рассмотрим систему 2 свободных комплексных скалярных полей $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$ с лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{2} \partial_\mu \phi_i^* \, \partial^\mu \phi_i.$$

Найдите все сохраняющиеся токи (в смысле теоремы Нетер) этой системы.

5*. В двумерном пространстве Минковского с координатами x^0 и x^1 и метрикой $g = \mathrm{diag}(1, -1)$ рассмотрим скалярное поле со следующей лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\, \partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{\beta^2}\, (1 - \cos(\beta\, \phi)).$$

а) Найдите частное решение уравнений движения для поля ϕ в виде $\phi(x) = f(x^1 - v x^0)$ такое, что $\lim_{x^1 \to +\infty}(f(x^1) - f(-x^1)) = 2\pi/\beta$.

б) Вычислите энергию и импульс найденного в пункте а) решения.