

Задача 1. Пусть A, B, C, D – четверка различных точек на проективной прямой, лежащей в проективном пространстве $\mathbb{P}^n$. Докажите, что эта четверка является гармонической (то есть пара A, B гармонически делит пару C, D), если существуют такие проективные координаты $(x_i) := (x_0 : \dots : x_n)$ в $\mathbb{P}^n$, в которых точки A, B, C, D имеют координаты $A = (a_i)$, $B = (b_i)$, $C = (a_i + \theta b_i)$, $D = (a_i - \theta b_i)$ для некоторого $\theta \neq 0$.

Задача 2. Согласно принципу двойственности проективным прямым $\mathbb{P}^1$ в плоскости $\mathbb{P}^2$ соответствуют точки $\{\mathbb{P}^1\}$ двойственной проективной плоскости $\check{\mathbb{P}}^2$. Пусть f – проективное преобразование плоскости $\mathbb{P}^2$, задаваемое в проективных координатах $(x_0 : x_1 : x_2)$ уравнениями $\rho x'_i = \sum_{j=0}^2 a_{ij} x_j$, $i = 0, 1, 2$. Рассмотрим отображение $\check{f}$ двойственной проективной плоскости $\check{\mathbb{P}}^2$ в себя, определенное по правилу $\check{f}(\{\mathbb{P}^1\}) := \{f(\mathbb{P}^1)\}$. Является ли $\check{f}$ проективным преобразованием плоскости $\check{\mathbb{P}}^2$? Если да, то какими уравнениями оно задается в двойственных к $(x_0 : x_1 : x_2)$ проективных координатах $(a_0 : a_1 : a_2)$ в $\check{\mathbb{P}}^2$?

Задача 3. а) Докажите, что если на проективной прямой $\mathbb{P}^1$ (над произвольным полем $\mathbf{k}$ характеристики $\text{char} \mathbf{k} \neq 2$) пара точек A, B гармонически делит пару точек C, D , то в произвольной системе координат на аффинной прямой $\mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{D\}$ точка C является "аффинной серединой отрезка $[AB]$ " в следующем смысле: координаты точек a, b и c точек A, B и C соответственно связаны соотношением $c = \frac{1}{2}(a + b)$.

б) Пусть в аффинной плоскости $\mathbb{A}^2$ (над полем $\mathbf{k}$ характеристики $\text{char} \mathbf{k} \neq 2$) дан трехвершинник ABC , и пусть B_1 и C_1 – соответственно "середины отрезков $[AB]$ и $[AC]$ " в вышеуказанном смысле. Докажите, что аффинная прямая B_1C_1 "параллельна" аффинной прямой BC в том смысле, что пересечение этих прямых пусто.

Задача 4. Пусть $\mathbf{k}$ – поле характеристики $\text{char} \mathbf{k} \neq 2$, $A = (a_{ij}) \in M(3, \mathbf{k})$ – ненулевая симметрическая матрица, и $\mathbb{P}^2$ – проективная плоскость над полем $\mathbf{k}$ с координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$. Коникой в $\mathbb{P}^2$ называется множество $C = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 \mid \sum_{i,j=0}^2 a_{ij} x_i x_j = 0\}$. Коника C в $\mathbb{P}^2$ называется невырожденной, если $\det A \neq 0$. Матрицу A будем называть матрицей, задающей конику C . Проективной касательной прямой к конике C в точке $x \in C$ называется такая проективная прямая l в $\mathbb{P}^2$, проходящая через точку x , что либо $l \subset C$, либо $l \cap C = \{x\}$.

а) Докажите, что коника $C \neq \emptyset$ невырождена тогда и только тогда, когда в каждой ее точке имеется единственная проективная касательная к C .

б) Для невырожденной коники C найдите уравнение проективной касательной к ней в произвольной точке $x_0 \in C$.

в) Произвольная коника $C \subset \mathbb{P}^2$ не совпадает с $\mathbb{P}^2$ (то есть является собственным подмножеством в $\mathbb{P}^2$). При этом найдутся три точки $y_1, y_2, y_3 \notin C$, не лежащие на одной проективной прямой, то есть такие, что их проективная оболочка совпадает с $\mathbb{P}^2$.

Задача 5. Пусть $\text{char} \mathbf{k} \neq 2$ и C – непустая коника в $\mathbb{P}^2$. Докажите равносильность следующих утверждений:

а) существует единственная точка $x \in C$ такая, что всякая проективная прямая через x в $\mathbb{P}^2$ является проективной касательной к C ,

б) $\text{rank} A = 2$, где A – матрица, задающая конику C .