Листок 6

Пусть (x, y, z) – однородные координаты в $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

1. На аффинной карте (x, y) точка имеет координаты (a, b). Найти её координаты на карте (x, z).

2. На аффинной карте (x, y) задана прямая L: $x = 2t + 1$, $y = 3t - 2$. Найти $\lim\limits_{t\to\infty}(x(t), y(t))$ в $\mathbb{P}^2$.

3. Пусть l_1 и l_2 – две прямые в $\mathbb{P}^2$. Рассмотрим точку $A \notin l_1 \cup l_2$. Рассмотрим центральную проекцию π_A: $l_1 \to l_2$ из точки A прямой l_1 на прямую l_2. Доказать, что существует такое проективное преобразование φ: $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$, что ограничение φ на прямую l_1 совпадает с π_A. Можно ли утверждать единственность такого преобразования φ?

4. Пусть $\mathbb{P}^1$ вложено в $\mathbb{P}^2$ в виде гиперплоскости $z = 0$. Верно ли, что любое проективное преобразование φ: $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ можно продолжить до проективного преобразования $\widetilde{\varphi}$: $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$, которое совпадает с φ на $\mathbb{P}^1$?

5. На сколько частей делят $\mathbb{R}P^2$ 4 прямые общего положения (т.е. никакие три из них не проходят через одну точку?)

6. Можно ли в $\mathbb{P}^2(k)$, char $\neq 2$, расположить 7 прямых и 7 точек так, чтобы на каждой прямой лежало 3 точки, а через каждую точку проходило 3 прямые?

7. Используя понятие пучка, коник, составить уравнение коники в $\mathbb{P}^2$, проходящей через 5 точек: $A(0, 0, 1)$, $B(0, 1, 1)$, $C(1, 0, 1)$, $D(2, -5, 1)$, $E(-5, 2, 1)$.

8. На окружности с диаметром AC выбрана произвольная точка B, отличная от A и C. Пусть M и N – середины хорд AB, BC, а P и Q – середины меньших дуг, стягиваемых этими хордами. Прямые AQ и BC пересекаются в точке K, а прямые CP и AB – в точке L. Доказать, что MQ, NP и KL пересекаются в одной точке.

9. а) Докажите, что существует единственная нетождественная инволюция σ: $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ (т.е. проективное преобразование второго порядка), которое оставляет на месте точку $A(1, 1, 1)$ и каждую точку прямой l: $2X + Y + Z = 0$.
б) Найти $\sigma(1, 2, 3)$.

10. Проективное преобразование $\widehat{A}$: $\mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2$ задано матрицей $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{-7} \end{pmatrix}$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \widehat{A}^n x$, $x \in \mathbb{C}P^2$, если $\widehat{A}x \neq x$.

11. Рассмотрим группу $\mathrm{Aut}C$ проективных преобразований $\mathbb{C}P^2$, сохраняющих конику C: $XY + YZ + ZX = 0$. Доказать, что с помощью преобразования из группы $\mathrm{Aut}C$ можно любые три точки на этой конике перевести в любые другие три точки на ней.

12. Пусть три различные касательные к невырожденной конике $C \subset \mathbb{C}P^2$ пересекаются в точках A, B, C. Пусть a точка касания на стороне BC. Аналогично определяются точки b и c. Прямые Aa, Bb, Cc, AB, BC, CA пересекаются по три в четырех точках (A, B, C, O) (почему?). Добавим к 6 указанным прямым 4 поляры точек (A, B, C, O) относительно квадрики C, а к 4 точкам (A, B, C, O) – полюса 6 указанных прямых относительно той же квадрики. Доказать, что полученная конфигурация из 10 точек и 10 прямых является конфигурацией Дезарга 10_3 (на каждой прямой лежит три точки, а через каждую точку проходят 3 прямые).

.