

Задача 1. Пусть $\text{char} \mathbf{k} \neq 2$ и C – непустая коника в \mathbb{P}^2 . Докажите равносильность следующих утверждений:

- а) существует единственная точка $x \in C$ такая, что всякая проективная прямая через x в \mathbb{P}^2 является проективной касательной к C ,
- б) $\text{rank} A = 2$, где A – матрица, задающая конику C .

Задача 2. В аффинной плоскости (над \mathbb{R} или \mathbb{C}) найдите центр симметрии коники с уравнением:

- а) $xy - 4x + 2y - 3 = 0$,
- б) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 3 = 0$.

Задача 3. Определите канонический вид и каноническую систему координат для вещественной аффинной коники с уравнением

- а) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 6x - 8y + 8 = 0$.
- б) $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$.
- в) $2x^2 + 4xy + 3y^2 + 4x + 2y + 3 = 0$

В каждом случае укажите аффинный тип коник.

Задача 4. а) Для различных значений параметра $a \in \mathbb{R}$ найдите уравнения аффинных частей вещественной коники с уравнением $x_0^2 + x_1^2 - ax_3^2 = 0$, лежащих в аффинных картах U_0 , U_1 и U_3 , и определите их аффинный тип.

б) Прodelайте то же самое для различных значений параметра $a \in \mathbb{C}$ и комплексной коники с тем же уравнением.