Лекция 8-9

Электромагнитное поле

§1 Релятивистская частица во внешнем поле

До сих пор мы строили модели умозрительных скалярных полей — практиковались в полевом формализме. Теперь приступим к построению физической модели: частицы во внешнем поле.

Частица релятивистская, поскольку мы верим в релятивистскую инвариантность фундаментальных физических моделей (инвариантность относительно действия группы Пуанкаре). Поэтому и взаимодействие тоже должно быть релятивистски инвариантным. Это значит, что рассматриваемые нами поля могут быть скалярными — $\varphi(x)$, 4-векторными — $A^\mu(x)$, 4-тензорными 2 ранга — $g^{\mu\nu}(x)$ и т.д. А действие модели должно быть инвариантом действия группы Пуанкаре. Практически это значит, что все верхние и нижние 4-индексы входящих в него величин должны быть попарно просуммированы.

Частица описывается 4-вектором $x^\mu(\sigma)$, где σ — параметр вдоль мировой линии (траектории) частицы. Взаимодействие частицы описывается интегралом вдоль ее мировой линии, поскольку частица может взаимодействовать лишь с тем, что она "видит" в точке своего присутствия (взаимодействия распространяются с конечной скоростью $\leq c$). Итак, варианты взаимодействия частицы с различными полями имеют вид:

1) С 4-векторным полем: $S_{вз} = \int\limits_{\gamma} A^{\mu}(x)\, dx_{\mu}$ ← γ – траектория частицы.

2) Со скалярным полем: $S_{вз} = \int\limits_{\gamma} \varphi(x) \sqrt{dx^{\mu} dx_{\mu}}$.

3) С 4-тензорным полем 2 ранга: $S_{вз} = \int\limits_{\gamma} \sqrt{g^{\mu\nu}(x)\, dx_{\mu} dx_{\nu}}$

Это – простейшие возможные варианты.

Замечаем, что

* вариант с полем $A^{\mu}(x)$ выглядит самым простым;
* вариант с полем $\varphi(x)$ – частный случай варианта с полем $g^{\mu\nu}(x)$;
* вариант с $g^{\mu\nu}(x)$ можно интерпретировать как модель частицы в искривленном пространстве с метрикой $g^{\mu\nu}(x)$.

Мы изучим простейший вариант с векторным полем $A^{\mu}(x)$. Полное действие модели:

$$\boxed{S[x^{\mu}(s)] = \underbrace{-mc \int\limits_{\gamma} \sqrt{dx^{\mu} dx_{\mu}}}_{\text{свободная рел. частица}} - \frac{e}{c} \int\limits_{\gamma} A^{\mu}(x)\, dx_{\mu}} \quad (0)$$

Здесь e – новый параметр, описывающий величину взаимодействия частицы и поля – заряд частицы.

Поле $A^\mu(x)$ мы пока рассматриваем как заданное извне – внешнее. Оно, в отличие от $x^\mu(\sigma)$, не определяется варьированием действия и требованием $\delta S=0$. Законы преобразования $A^\mu(x)$ под действием группы Пуанкаре заданы:

$$\underline{A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x) \text{ при } x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\nu.}$$

Выбрав в качестве параметра σ вдоль траектории частицы γ лабораторное время: $t = x^0/c$, получаем лагранжиан системы в виде

$$\boxed{L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}} - eA^0(\vec{x},t) + \frac{e}{c}(\dot{\vec{x}}, \vec{A}(\vec{x},t))}$$

Здесь $A^\mu = (A^0, \vec{A})$.

Вычислим обобщенный импульс и энергию системы:

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = \frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2/c^2}} + \frac{e}{c}\vec{A}$$

$$E = \left(\dot{\vec{x}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}}\right) - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2/c^2}} + eA^0.$$

Из них составляем 4-вектор энергии-импульса системы:

$$\boxed{P^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{P}\right) = p^\mu + \frac{e}{c}A^\mu}, \text{ где}$$

$$p^\mu = \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2/c^2}}, \frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2/c^2}} \right)$$ — 4-вектор энергии-импульса самой частицы (см §4 лекций 2-3), а

$\frac{e}{c}A^\mu$ — вклад внешнего поля.

Упражнение: вычислите гамильтониан системы.

Подсказка: проще всего воспользоваться соотношением

$$p_\mu p^\mu = m^2c^4$$

Ответ: $H = c\sqrt{m^2c^4 + (\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})^2} + eA^0$

Уравнения Эйлера-Лагранжа системы запишем в традиционном ньютоновском виде.

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} \equiv \vec{\nabla} L = \frac{e}{c}\vec{\nabla}(\vec{A}, \dot{\vec{x}}) - e\vec{\nabla}A^0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}}\right) \equiv \frac{d}{dt}(\vec{P}) = \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{e}{c}\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\dot{\vec{x}}, \vec{\nabla})\vec{A}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\left(-\vec{\nabla}A^0 - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) + \frac{e}{c}\Big(\underbrace{\vec{\nabla}(\vec{A}, \dot{\vec{x}}) - (\dot{\vec{x}}, \vec{\nabla})\vec{A}}_{\parallel}\Big),$$

$\dot{\vec{x}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$ в силу правила $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - (\vec{a}, \vec{b})\vec{c}$

Обозначая

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}A^0 - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A}} \qquad (*)$$

получаем окончательно:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\dot{\vec{x}} \times \vec{H}} \qquad (**)$$

Формула (**) — это школьное уравнение движения заряженной частицы во внешних электрическом и магнитном полях, напряженностями $\vec{E}$ и $\vec{H}$, соответственно.

$e\vec{E}$ — сила Кулона (электростатическое взаимодействие)

$\frac{e}{c}\dot{\vec{x}}\times\vec{H}$ — сила Лоренца.

Итак, простейшее релятивистски-инвариантное взаимодействие частицы с внешним 4-векторным полем приводит к уравнениям, описывающим движение заряда в электрическом и магнитном полях.

Есть еще несколько вопросов, в которых следует разобраться:

1) В действии и лагранжиане системы (частица + внешнее поле) присутствует 4-вектор A^μ, а в уравнениях движения частицы — два 3-вектора $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

$\vec{E}$ и $\vec{H}$ — реальные, физически измеряемые поля. <u>Можно ли их записать в 4-ковариантном виде?</u>

~~Вычисленными~~ Перепишем (*) со ф4 в компонентах:

$$E^i = -\frac{\partial A^0}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial x^0} = -\partial_i A^0 - \partial_0 A^i = -\partial^0 A^i + \partial^i A^0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu$$

$$H^i = \varepsilon^{ijk}\frac{\partial A^k}{\partial x^j} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\left(\frac{\partial A^k}{\partial x^j} - \frac{\partial A^j}{\partial x^k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\left(\partial_j A^k - \partial_k A^j\right) = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\left(\partial^j A^k - \partial^k A^j\right)$$

Замечаем, что если ввести обозначение

$$\boxed{F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu}, \qquad (***)$$

то

$$\begin{cases} E^i = -F^{0i} = F^{i0} \\ H^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F^{jk} \quad \left(\Leftrightarrow F^{ij} = -\varepsilon^{ijk}H^k\right) \end{cases} \qquad (4).$$

Записывая $F^{\mu\nu}$ в виде кососимметрической 4×4 матрицы имеем:

$$F^{\mu\nu} \doteq \begin{array}{c|c} \mu\backslash\nu & \begin{matrix} 0 & \quad 1 & \quad 2 & \quad 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -H^3 & H^2 \\ E^2 & H^3 & 0 & -H^1 \\ E^3 & -H^2 & H^1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (4')$$

Итак, пара 3-векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ удобным образом компонуется в кососимметрический 4-тензор 2 ранга, называемый <u>тензором напряженности электромагнитного поля</u>

Пользуясь выражениями (4) нетрудно вывести закона преобразования $\vec{E}$ и $\vec{H}$ при переходе в движущуюся систему координат (при вращениях они, очевидно, ведут себя как 3-векторы).

<u>Упражнение</u>: выведите формулы преобразования

$$E'^1 = E^1, \quad E'^2 = \frac{E^2 - \frac{V}{c}H^3}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad E'^3 = \frac{E^3 + \frac{V}{c}H^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

$$H'^1 = H^1, \quad H'^2 = \frac{H^2 + \frac{V}{c}E^3}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad H'^3 = \frac{H^3 - \frac{V}{c}E^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

при переходе в систему координат O', движущуюся вдоль оси $\vec{Ox}$ со скоростью V.

---

② Выражения (*) / (***) для физических полей $\vec{E}, \vec{H}$ / $F^{\mu\nu}$ накладывают на эти поля некоторые ограничения.

Действительно, из (***) следует, что 2-форма $F = \frac{1}{2}F^{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu$ – точная:

$$\boxed{F = dA, \text{ где } A = A^\mu dx_\mu} \qquad (\diamond)$$

Следовательно, $dF \equiv 0$.

или, в компонентах:

$$\partial^\mu F^{\nu\rho} dx_\mu \wedge dx_\nu \wedge dx_\rho \equiv 0 \iff \boxed{\partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} + \partial^\rho F^{\mu\nu} = 0}$$

Это 4 независимых условия на компоненты $F^{\mu\nu}$:

Каждое условие получается выбором трех различных значений для индексов μ, ν, ρ из набора $\{0, 1, 2, 3\}$.

Выбору $\{\mu, \nu, \rho\} = \{1, 2, 3\}$ соответствует условие

$$\boxed{(\vec{\nabla}, \vec{H}) = 0} \qquad (A')$$

Выборам $\mu = 0$, $\{\nu, \rho\} = \{1,2\} / \{3,1\} / \{2,3\}$:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}} \qquad (A')$$

Соотношения (A), (A') называются первой парой уравнений Максвелла. Это <u>не</u> уравнения движения. Уравнения движения для электромагнитных полей мы еще не выводили. Это артефакты формул (*)/(***).

---

(3). Связь между полями A^μ и $F^{\mu\nu} / \vec{E}, \vec{H}$ не взаимнооднозначная.

Действительно, из формулы (☆) следует, что одна и та же 2-форма F (т.е. $F^{\mu\nu}$) соответствует целому семейству 1-форм A (т.е. A^μ), отличающихся друг от друга на точную 1-форму $d\alpha = \partial^\mu \alpha \, dx_\mu$.

То есть одни и те же физические поля $\vec{E}, \vec{H} / F^{\mu\nu}$ порождаются целым семейством 4-векторных полей (B) $\boxed{A^\mu(x) + \partial^\mu \alpha(x)}$, где $\alpha(x)$ — произвольное скалярное поле

Следовательно 4-векторное поле $A^\mu(x)$ — не физическое. Оно, кстати, называется 4-вектором потенциала электромагнитного поля.

Целый класс потенциалов $A^\mu(x)$, отличающихся друг от друга преобразованиями (B), соответствует одной физической ситуации. Преобразования (B) ~~[illegible]~~ называются калибровочными.

---

(4) До сих пор мы не обращали внимания на одно кажущееся противоречие нашей конструкции: Мы строили релятивистски инвариантную модель => мы должны иметь законы сохранения энергии, импульса и пр.

Однако, как нетрудно убедиться, ни энергия ни обобщенный импульс рассматриваемой нами системы "частица во внешнем поле" не сохраняются! (лагранжиан системы явно зависит от $\vec{x}$ и t, через $A^\mu(\vec{x}, t)$).

В чем наша ошибка? Дело в том, что теорема Нётер, которая объясняет связь симметрий и законов сохранения, говорит об этой связи на уравнениях движения. Под действием группы Пуанкаре у нас преобразуются координаты частицы $x^\mu(\sigma)$ и поля $A^\mu(x)$. Значит и уравнения движения надо писать как для частицы ($\frac{\delta S}{\delta x^\mu(\sigma)}=0$), так и для полей ($\frac{\delta S}{\delta A^\mu(x)}=0$). На них будут выполняться законы сохранения.

Но поля $A^\mu(x)$ мы не зря считали внешними: попытка вариации действия (0) по полям A^μ приводит к противоречивым условиям типа $1=0$ (убедитесь!).

Чтобы исправить ситуацию с законами сохранения, надо придумать добавку к действию (0), которая позволит получать разумные уравнения движения для полей $A^\mu(x)$. Эта добавка — кинетический вклад векторного поля в действие — аналог кинетической энергии частицы.

Этим займемся в следующем параграфе.

§2 Свободное электромагнитное поле

Для построения действия свободного э.-м. поля воспользуемся нашим опытом со скалярным полем.
Лагранжева плотность свободного безмассового скалярного поля

– квадратична по полям $\varphi(x)$

– квадратична по производным ∂_μ

$$\left.\begin{matrix} \text{– квадратична по полям } \varphi(x) \\ \text{– квадратична по производным } \partial_\mu \end{matrix}\right\} \; \mathcal{L} = \partial_\mu \varphi \, \partial^\mu \varphi$$

Первое гарантирует ~~однородность~~ линейность и однородность уравнений движения поля $\Longrightarrow$ принцип суперпозиции решений этих уравнений $\Longleftrightarrow$ интерференция волн. Это важный принцип для свободных ~~волн~~. полей.

Второе дает нам уравнения 2-го порядка, как в механике.

Повторим все это для векторных полей, но будем также учитывать, что $A^\mu(x)$ – нефизические поля, а нам надо бы написать действие, зависящее лишь от физической части A^μ, т.е. от $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$.

Очевидный кандидат на роль лагранжевой плотности – $\boxed{F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}$ – квадратичен и по A^μ, и по ∂^μ. Есть ли еще варианты?

Оказывается есть: существует аналог тензора ε^{ijk} в 4-мерном пространстве Минковского –

полностью кососимметричный тензор 4-го ранга $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$:

$\varepsilon^{0123}=1$, $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ — меняет знак при перестановке $\forall$ пары индексов. Этими условиями он задан однозначно.

Можно убедиться, что он — инвариант ортохронных собственных преобразований Лоренца (компонента единицы в группе Лоренца). Следовательно, его можно использовать при свертке индексов 4-векторов и 4-тензоров и получать инварианты.

Зададим $\boxed{\tilde{F}^{\mu\nu}:=\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}F_{\rho\lambda}}$ — это еще один кососимметричный 4-тензор 2-го ранга, линейный по A^μ и по ∂^μ.

Для лагранжевой плотности имеем еще пару кандидатов $\boxed{\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}}$ и $\boxed{\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}}$ ← (квадратичные по A^μ и по ∂^μ)

Дальнейшего размножения кандидатов процедура $\tilde{*}$ не производит, так как

$$\boxed{\tilde{\tilde{F}}^{\mu\nu}=4F^{\mu\nu}}$$

Отсюда также следует, что $\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}=4F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ (проверьте эти соотношения).

Остаётся одна альтернатива ~~как~~ $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ какдидат: $\tilde F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ — но он оказывается 4-дивергенцией. Действительно

$$\tilde F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}F_{\mu\nu}F_{\rho\lambda} = 4\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\partial_\mu A_\nu \partial_\rho A_\lambda =$$

$$= 4\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\partial_\mu (A_\nu \partial_\rho A_\lambda) - 4\underbrace{\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}A_\nu \partial_\mu \partial_\rho A_\lambda}_{=0} =$$

$$= \partial_\mu \left(4\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}A_\nu \partial_\rho A_\lambda\right).$$

Как мы знаем, добавка 4-дивергенции к лагранжевой плотности не меняет уравнений движения (исключения возможны в теориях на топологически нетривиальных пространствах).

У нас остался единственный, связанный с $F^{\mu\nu}$ кандидат на роль действия свободного э-м. поля

(★) $$\boxed{S_{э\text{-}м.}[A^\mu(x)] = \underbrace{-\frac{1}{16\pi c}}\int d^4x\, F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}}$$

этот коэффициент неважен в свободной теории. В теории со взаимодействующим э-м. полем (в присутствии зарядов и токов) его выбор задаёт систему единиц для измерения электромагнитных величин. Мы пользуемся системой Гаусса.

Заметим, что добавление в действие зависящих от A^μ членов типа $A^\mu A_\mu$, $(\partial_\mu A^\mu)^2$ и т.п. — не инвариантных относительно калибровочных преобразований (B), делает все поле $A^\mu(x)$ (а не только его часть, связанную с $F^{\mu\nu}$) физическим, и меняет физическое содержание модели: появляются новые степени свободы у поля. Мы этим заниматься не будем, ограничимся обычной электродинамикой.

Варьируя действие (★) по полям $A^\mu(x)$, получаем уравнения движения свободного э-м. поля

$$(D)\quad \boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0} \qquad \text{(проверьте!)}$$

Распишем эти уравнения в 3-векторном виде:

$\nu = 0$ даёт:
$\nu = i$:

$$\boxed{\begin{aligned} (\vec{\nabla}, \vec{E}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}} \quad (D')$$

Это вторая пара уравнений Максвелла для свободного электромагнитного поля

Обсудим простейшие решения уравнений Максвелла — плоские волны. Решать мы будем не уравнения для $\vec{E}$ и $\vec{H}$ (т.е. для $F^{\mu\nu}$) — их слишком много: 2 пары (A') и (D'). Решать мы будем уравнения на потенциал A^μ — их в 2 раза меньше — (D). Но у них есть интересные особенности, связанные с тем, что A^μ — нефизические поле.

В терминах $A^\mu(x)$ уравнения (D) переписываются в виде

$$\boxed{\Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = 0} \quad (D'')$$

(напоминаем: $\Box = \partial_\mu \partial^\mu$)

Они имеют семейства эквивалентных решений, отличающихся друг от друга калибровочными преобразованиями (B): $\{A^\mu + \partial^\mu \alpha\}_{\forall \alpha(x)}$ и отвечающих одному и тому же физическому состоянию поля.

Выберем из каждого такого семейства по одному представителю $A^\mu_{(0)}$, для которого уравнения (D'') примут наиболее простой вид.

Воспользуемся произволом выбора поля $\alpha(\vec{x},t)$ так, чтобы занулить 0-компоненту 4-вектора $A^\mu_{(0)}$

$$\boxed{A^0_{(0)}(\vec{x},t) = 0}$$

Этого всегда можно добиться, т.к. уравнение

$$A^0(\vec{x},t) + \partial^0 \alpha(\vec{x},t) = 0$$

разрешимо относительно $\alpha(\vec{x},t)$.

У нас остаётся ещё произвол в добавлении к $\alpha(\vec{x},t)$ функции $\beta(\vec{x})$ не зависящей от t.

Этим оставшимся произволом мы воспользуемся так, чтобы занулить выражение $(\vec{\nabla}, \vec{A}_{(0)}(\vec{x},t))$ в начальный момент времени $t=0$. Этого можно добиться, так как уравнение

$$\left(\vec{\nabla}, \vec{A}(\vec{x},0)\right) + \underbrace{(\vec{\nabla},\vec{\nabla})}_{\Delta = \partial_i \partial_i} \beta(\vec{x}) = 0$$

разрешимо относительно $\beta(\vec{x})$.

Проследим за выражением $(\vec{\nabla}, \vec{A}_{(0)}(x))$ в произвольный момент времени:

$$\partial_0 (\partial_i A^i_{(0)}) = \partial_i (\partial_0 A^i_{(0)}) = \partial_i (\partial^0 A^i_{(0)} - \underbrace{\partial^i A^0_{(0)}}_{\text{т.к. } A^0_{(0)}=0}) =$$

$$= -\partial_i F^{i0}_{(0)} = -\underbrace{\partial_\mu}_{\text{т.к. } F^{00}=0} F^{\mu 0}_{(0)} = 0 \text{ на уравнениях движения.}$$

Отсюда заключаем, что $\partial_i A^i_{(0)}(\vec{x},t) = 0$ во все моменты времени.

Итак, для решения уравнений (D'') мы выберем представителя $A^\mu_{(0)}(x)$, удовлетворяющего условиям

$$\boxed{A^0_{(0)}(x) = 0\,, \quad \vec{\nabla}\vec{A}_{(0)}(x) = 0} \qquad (E)$$

Такой выбор называется выбором "кулоновской калибровки". В кулоновской калибровке (D'') становится обычным волновым уравнением:

$$\boxed{\Box A^{\mu}_{(0)} = 0} \qquad (D''')$$

<u>Rem</u>: Чтобы получить из (D') волновое уравнение достаточно было наложить более слабое, но сравнению с (E) условие

$$\boxed{\partial_{\mu} A^{\mu} = 0} \qquad (F)$$

В отличие от (E) оно еще и релятивистски инвариантное. Такое условие называют "лоренцевой калибровкой". Его единственный, но существенный недостаток в том, что оно не выделяет единственного представителя в классе физически эквивалентных потенциалов A^{μ}, то есть не является настоящей калибровкой. Условие (F) все еще допускает возможность добавления к A^{μ} члена $\partial^{\mu}\alpha$, где α — ненулевое решение волнового уравнения $\Box\alpha = 0$.

Мы уже получали общее решение волнового уравнения (D'''). Сейчас обсудим частные решения (D''') в виде плоских волн:

$$\boxed{\begin{aligned} &A^{0} = 0 \\ &\vec{A}(\vec{x},t) = \vec{f}\left(t - \frac{(\vec{n},\vec{x})}{c}\right) \end{aligned}} \qquad (X)$$

где

$\vec{n}$ — 3-вектор единичной длины: $|\vec{n}| = 1$

$\vec{A}(\vec{x}, t)$ представляет из себя плоскую волну (постоянную в направлениях $\perp \vec{n}$), распространяющуюся в направлении $\vec{n}$ со скоростью c. Нетрудно убедиться, что это решение волнового уравнения. Чтобы выполнить также условия кулоновской калибровки, потребуем также

$$0 = (\vec{\nabla}, \vec{A}(\vec{x}, t)) = -\frac{1}{c}(\vec{n}, \vec{f}\,'), \text{ где } \vec{f}\,' = \frac{d\vec{f}(u)}{du}.$$

Итак, при условии $(\vec{n}, \vec{f}\,') = 0$ анзац (X) является решением уравнений (D''). Какова $\vec{E}$ и $\vec{H}$ для этого решения? Вычислим по формулам (*) (стр 4)

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\vec{f}\,',$$

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{1}{c}\vec{n} \times \vec{f}\,'.$$

Условие кулоновской калибровки гарантирует: $\boxed{\vec{E} \perp \vec{n}}$, а формула для $\vec{H}$: $\boxed{\vec{H} = \vec{n} \times \vec{E}}$.

Итак, плоские электромагнитные волны <u>поперечны</u>, $\vec{E}$ и $\vec{H}$ ортогональны $\vec{n}$ – направлению распространения волны, причем $\boxed{\vec{E} \perp \vec{H}}$, и $\boxed{|\vec{E}| = |\vec{H}|}$. Скорость их распространения – c:

$$\vec{E} = \vec{E}\left(t - \frac{\vec{n}\vec{x}}{c}\right),$$

$$\vec{H} = \vec{n} \times \vec{E} = \vec{H}\left(t - \frac{\vec{n}\vec{x}}{c}\right).$$

Rem: Последнее замечание в этом разделе касается еще одной особенности уравнений движения э.-м. поля (D): они (дифференциально) зависимы. Действительно, левая их часть $\mathcal{L}^\nu := \partial_\mu F^{\mu\nu}$ удовлетворяет тождеству

$$\boxed{\partial_\nu \mathcal{L}^\nu \equiv 0}$$

– следствие кососимметричности $F^{\mu\nu}$.

Этот факт конечно связан с неоднозначной разрешимостью этих уравнений относительно A^μ: дифференциальный оператор $(\delta^\nu_\mu \Box - \partial^\nu \partial_\mu)$ (см (D'')) имеет ~~ядро~~ нетривиальное ядро.

Оба этих факта связаны с наличием калибровочных преобразований (B) в модели и объясняются 2-й теоремой Нётер, которую мы с вами не обсуждаем. Все современные теории фундаментальных взаимодействий обладают калибровочными симметриями. Их называют калибровочными или (чуть более общо) сингулярными теориями – уравнения движения в них не разрешимы относительно старших производных (матрица Гессиана вырождена).

§ 3 Взаимодействие э.-м. поля с зарядами

Объединяя действия заряженной частицы и электромагнитного поля получаем электродинамику:

$$\boxed{S_{э.-д.}[x^\mu(\sigma), A^\mu(x)] = -mc\int_\gamma \sqrt{dx^\mu dx_\mu} - \frac{e}{c}\int_\gamma A_\mu dx^\mu - \frac{1}{16\pi c}\int_\Omega d^4x\, F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}} \qquad (\alpha)$$

Варьируя это действие по $x^\mu(\sigma)$ получаем уже рассматривавшиеся нами уравнения движения заряда e в э.-м. поле $\vec{E}, \vec{H}$ (**). Только поля эти уже не извне заданные, а определяемые вариацией $S_{э.-д.}$ по $\delta A^\mu(x)$.

Варьировать (α) по $\delta A_\mu(x)$ не удобно, т.к. A^μ там входит в интегралы разных типов $\int_\gamma$ и $\int_\Omega d^4x$. Преобразуем слагаемое $-\frac{e}{c}\int A_\mu dx^\mu$ к 4-объемному виду:

$$-\frac{e}{c}\int_\gamma A_\mu(x(\sigma))\,dx^\mu(\sigma) \overset{\text{выбор } \sigma = t}{=} -\frac{e}{c}\int_{t_1}^{t_2} dt\, A_\mu(x(t))\frac{dx^\mu}{dt} =$$

$$= -\frac{e}{c^2}\int_{x^0_1}^{x^0_2} dx^0 \int_{\mathbb{R}^3} d^3x\, \delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t))\left(A_\mu(x)\frac{dx^\mu}{dt}\right) =$$

вставка трехкратного интеграла от δ-функции $\delta^3(\vec{y}) = \delta(y_1)\delta(y_2)\delta(y_3)$

$$\boxed{= -\frac{1}{c^2}\int_\Omega d^4x\, (A_\mu(x), j^\mu(x))}, \qquad (\beta)$$

где (γ)

$$\boxed{j^\mu(x) = (c\rho(x), \vec{j}(x)),\ \rho(x) = e\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t)),\ \vec{j}(x) = \rho\cdot\dot{\vec{x}}(t)}$$

Величина j^μ называется 4-током заряда e.

$\rho(x)$ имеет смысл плотности распределения заряда e в пространстве. Для нашей точечной частицы он сосредоточен в месте $\vec{x}(t)$ нахождения частицы.

$\vec{j}(x)$ имеет смысл плотности тока заряда e. Она пропорциональна плотности заряда ρ и его скорости перемещения $\dot{\vec{x}}(t)$.

Варьируя теперь действие электродинамики (α) со вторым слагаемым в виде (β) по $\delta A_\nu(x)$ получаем

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu} \qquad (\delta)$$

Это уравнение движения электромагнитного поля в присутствии зарядов, создающих 4-ток $j^\nu(x)$ (см. (γ)).

В 3-векторном виде оно записывается так:

$$\nu = 0 : \quad (\vec{\nabla}, \vec{E}) = 4\pi \rho(\vec{x}, t)$$

$$\nu = i : \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{x}, t) \qquad (\delta')$$

Это 2-я пара уравнений Максвелла в присутствии зарядов.

Как мы отмечали в конце прошлого параграфа, левые части уравнений (δ) дифференциально-зависимы: $\partial_\nu(\partial_\mu F^{\mu\nu}) \equiv 0$. Следовательно, условием совместности уравнений (δ) является

$$\boxed{\partial_\nu j^\nu(x) = 0} \qquad (\lambda)$$

<u>Упражнение</u>: Проверьте, что для 4-тока заряда e, задаваемого формулами (γ) это условие выполняется.

~~Это условие сохра~~

Такое условие — уравнение непрерывности — мы уже получали при обсуждении законов сохранения в лекции 7 (см (3δ) на стр 18). В данном случае оно говорит о сохранении электрического заряда:

$\frac{1}{c} j^0 = \rho(\vec{x}, t)$ — плотность распределения эл. заряда в пространстве

$\vec{j} = \dot{\vec{x}} \rho$ — плотность потока эл. заряда

В терминах этих величин условие (λ) переписывается как

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla}\vec{j}} \qquad (\lambda')$$