Лекция 10

Энергия и импульс электромагнитного поля.

В предыдущих 2-х лекциях мы построили релятивистски-инвариантное действие, описывающее взаимодействие точечных зарядов и электромагнитного поля.
У этой системы (заряды + э.-м. поле) согласно теореме Нётер должны сохраняться полные энергия, импульс, момент импульса. При этом, как мы видели, энергия и импульс зарядов меняются. Значит должны быть переменные энергия и импульс э.-м. поля, точнее их плотности распределения и плотности потоков.

Чтобы их определить есть 2 пути:

а) воспользоваться теоремой Нётер;

б) проследить за изменением энергии и импульса зарядов, и определить по ним соответствующие характеристики поля.

Первый путь — более формальный и, как мы увидим, не вполне однозначен и нуждается в дополнительных "физических" аргументах. Поэтому сначала мы рассмотрим 2-й "физический" способ.

Этот способ ~~[illegible]~~ предложен Джоном Пойнтингом (1884 г.)

§1 Плотность энергии и плотность потока энергии э.-м. поля (вывод Пойнтинга)

Напомним, в электродинамике уравнение движения точечного заряда e имеет вид:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2/c^2}}\right) = e\vec{E} + \frac{e}{c}\,\dot{\vec{x}}\times\vec{H}, \quad (1)$$

где э.-м. поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ удовлетворяют уравнениям

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ll} \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}, & (2a) \\ (\vec{\nabla},\vec{H}) = 0, & (2b) \end{array}\right.}_{\text{1-я пара}} \qquad \underbrace{\left[\begin{array}{ll} \vec{\nabla}\times\vec{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}, & (2c) \\ (\vec{\nabla},\vec{E}) = 4\pi\rho, & (2d) \end{array}\right.}_{\text{2-я пара}}$$

где $\rho = e\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t))$ и $\vec{j} = \dot{\vec{x}}\rho$ — плотность эл. заряда и плотность его потока. Их можно организовать в 4-вектор $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$.

Как и в Ньютоновой механике, закон изменения энергии частицы можно получить, умножив ее уравнение (1) скалярно на $\dot{\vec{x}}$:

$$\dot{\vec{x}}\,\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\Bigl(\underbrace{\frac{mc^2}{\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2/c^2}}}\Bigr) = \frac{d\,\mathcal{E}_ч}{dt} = e(\dot{\vec{x}},\vec{E})$$

Энергия релятивистской частицы $\mathcal{E}_ч$ включает ее кинетическую энергию и энергию покоя mc^2

Домножим обе части равенства на $\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t))$ с тем, чтобы заменить $\dot{\vec{x}}$ в правой части на плотность потока заряда. Имеем:

$$\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t))\frac{d\mathcal{E}_ч}{dt} = (\vec{j}, \vec{E}) \qquad (3)$$

В левой части равенства — изменение плотности энергии частицы (она сосредоточена в точке $\vec{x}(t)$). Идея состоит в том, чтобы представить правую часть в виде 4-дивергенции некоторого 4-тока: $-\partial_\mu X^\mu$, связанного с э.-м. полем.

С этой целью выразим $\vec{j}$ в правой части через $\vec{E}$ и $\vec{H}$, воспользовавшись уравнением движения э.-м. поля (2c):

$$(\vec{j}, \vec{E}) \overset{(2c)}{=} -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \vec{E}\right) + \frac{c}{4\pi}(\vec{E}, \vec{\nabla}\times\vec{H})$$

Преобразуем последнее слагаемое, воспользовавшись свойствами смешанного произведения:

$$(\vec{E}, \vec{\nabla}\times\vec{H}) = \underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{H}, \vec{E})}_{\text{тут } \vec{\nabla} \text{ как дифф. оператор действует и на } \vec{H}, \text{ и на } \vec{E}} + \underbrace{(\vec{H}\times\vec{\nabla}, \vec{E})}_{\text{вычитаем действие } \vec{\nabla} \text{ на } \vec{E}, \text{ учитывая кососимметричность операции "}\times\text{"}} =$$

$$= (\vec{\nabla}, \vec{H}\times\vec{E}) + (\vec{H}, \vec{\nabla}\times\vec{E}) \overset{(2a)}{=} -(\vec{\nabla}, \vec{E}\times\vec{H}) - \frac{1}{c}\left(\vec{H}, \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right)$$

используем формулу $(\vec{a}\times\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}\times\vec{c})$

В результате имеем:

$$(\vec{j}, \vec{E}) = -\frac{1}{4\pi}\left\{\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \vec{E}\right) + \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \vec{H}\right)\right\} - \frac{c}{4\pi}(\vec{\nabla}, \vec{E}\times\vec{H})$$

$$= -\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}^2+\vec{H}^2\right) - \frac{c}{4\pi}(\vec{\nabla}, \vec{E}\times\vec{H}).$$

Обозначая

$$\boxed{\mathcal{E}_{э.-м.} = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2+\vec{H}^2\right), \quad \vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{H}} \qquad (4)$$

мы получаем формулу изменения энергии частицы (3) в виде

$$\boxed{\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t))\frac{d\mathcal{E}_ч}{dt} + \frac{\partial \mathcal{E}_{э.-м.}}{\partial t} = -(\vec{\nabla}, \vec{S})} \qquad (3')$$

Забегая вперёд, назовём $\mathcal{E}_{э.-м}$ плотностью энергии электромагнитного поля, $\vec{S}$ – плотностью его потока энергии. $\vec{S}$ также называют вектором Пойнтинга.

Чтобы убедиться в правильности такой интерпретации, проинтегрируем (3') по любому объему $V \in \mathbb{R}^3$, содержащему точку $\vec{x}(t)$, т.е. частицу. Получаем:

$$\frac{d\mathcal{E}_ч}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\int_V d^3x\left(\frac{\vec{E}^2+\vec{H}^2}{8\pi}\right)\right) = -\int_{\partial V}(\vec{S}, \vec{n})\,d\sigma$$

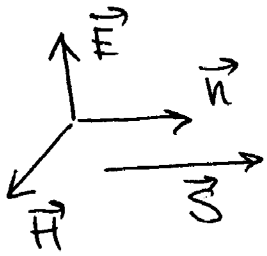
применяем теорему Стокса (случай Гаусса – Остроградского)

Формула утверждает, что изменение энергии частицы $\mathcal{E}_ч$ и поля $\int\limits_V d^3x\, \frac{\vec{E}^2+\vec{H}^2}{8\pi}$ в объёме V вызвано потоком энергии поля $\vec{S}$ через границу объема ∂V.

Rem: На самом деле мы нашли простейшее представление $(\vec{j},\vec{E}) = -\partial_\mu X^\mu$, $X^\mu = (c\,\mathcal{E}_{я\text{-}м}, \vec{S})$. Оно не единственно. К X^μ всегда можно добавить член вида $\partial_\nu A^{\mu\nu}$, где $A^{\mu\nu}$ – кососимметрична: $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$. $A^{\mu\nu}$ надо составить из $\vec{E}$ и $\vec{H}$, т.е. из $F^{\mu\nu}$. ~~Простой~~ Первый приходящий на ум выбор $A^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}$ плох, так как $\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$ на уравнениях движения, а значит такая добавка не изменит X^μ. Но можно, например, выбрать $\boxed{A^{\mu\nu} = F^{\mu\rho}F^{\nu\sigma}F_{\rho\sigma}}$, что, кажется, даст поправки к компонентам X^μ. Мы отметаем подобные варианты из соображений простоты и естественности. Действительно, это неестественно, чтобы плотность распределения энергии э.-м. поля $\frac{1}{c}X^0$ зависела не только от $\vec{E}$ и $\vec{H}$, но и от их производных, как это будет при добавке $X^\mu + \partial_\nu A^{\mu\nu}$. Итак, мы не доказываем теорем, мы строим физ. модель.

Чтобы освоиться с понятием плотности потока энергии э.-м. поля, приведем примеры (по Фейнману, т. 6 стр 291-296).

1 Плоская свободная электромагнитная волна
(свет от удаленного источника)

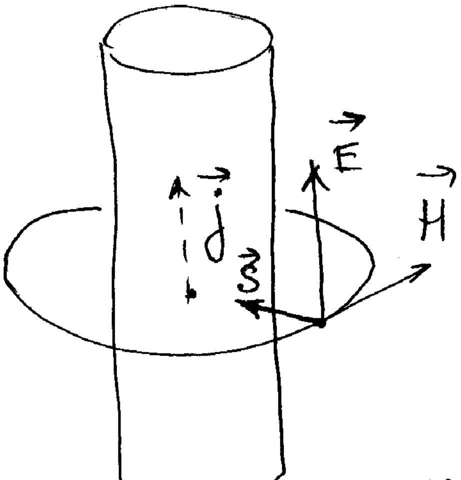


Как мы помним $|\vec{E}| = |\vec{H}|$ в плоской волне, так что можно считать

$$\mathcal{E}_{э.-м.} = \frac{\vec{E}^2}{4\pi}.$$

$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{H}$, так что $\vec{S}$ и $\vec{n}$ сонаправлены, причем $|\vec{S}| = c\cdot\frac{\vec{E}^2}{4\pi} = c\,\mathcal{E}_{э.-м.}$, то есть энергия э.-м. поля переносится в направлении $\vec{n}$ со скоростью света c.

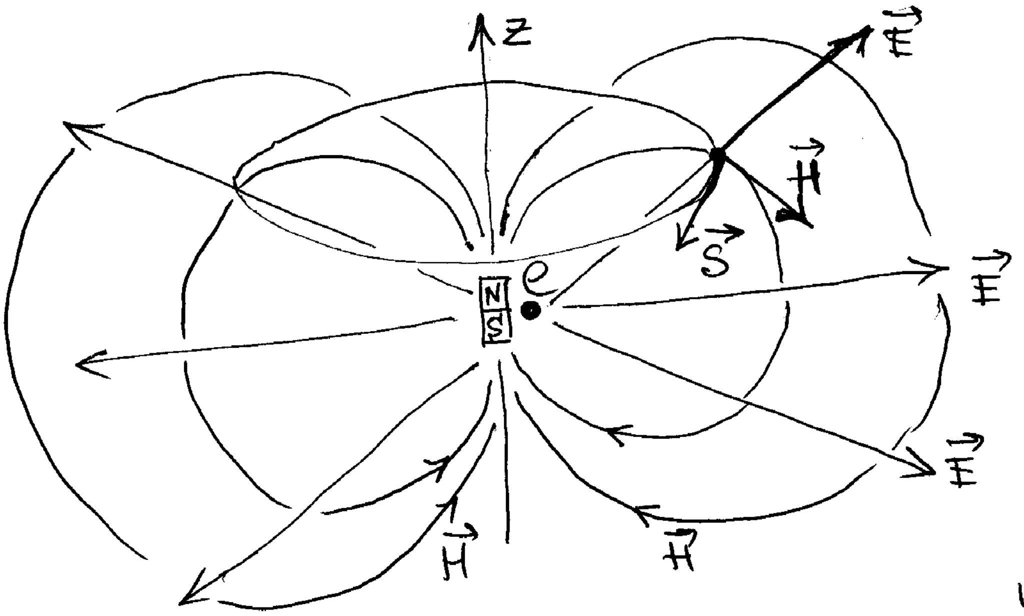
2 Проводник с ненулевым сопротивлением, по которому течёт ток.



Из за наличия сопротивления потенциал A^0 вдоль провода меняется и порождает поле $\vec{E} = -\vec{\nabla}A^0$. Поле $\vec{H}$ порождается током зарядов $\vec{j}$: $\vec{\nabla}\times\vec{H} \sim \vec{j}$ и направлено вдоль окружностей (см. рис.). В результате поток энергии $\vec{S}$ направлен из окружающего пространства к центру провода.

Получается, что электроны, текущие по проводу все вместе создают электромагнитное поле $\vec{E}$ и $\vec{H}$, а оно закачивает энергию назад из пространства в проводник. Эта энергия расходуется на нагревание провода.

3 Система заряд + магнит.



Рассмотрим закрепленные поблизости заряд и магнит. Силовые линии создаваемых ими полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ показаны на рисунке. Энергия э.-м. поля циркулирует вокруг оси z по окружностям. При этом в $\forall$ области пространства количество энергии э.-м. поля не меняется: сколько её втекает, столько и вытекает.

§2 Тензор энергии-импульса поля

Попробуем вычислить энергию и импульс поля, исходя из теоремы Нётер. Для разминки возьмем простейшее поле - скалярное. Его действие, удобным образом отнормированное, имеет вид

$$\boxed{S[\varphi] = \frac{1}{c}\int\limits_{\Omega} d^4x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - V(\varphi)\right)} \quad (5)$$

Оно инвариантно относительно трансляций координат и времени.

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{x}^\mu &= x^\mu + \xi^\mu \\ \tilde{\varphi}(\tilde{x}) &= \varphi(x) \end{aligned}} \quad (5')$$

4 независимых параметра $\Rightarrow$ 4 закона сохранения

Согласно теореме Нётер вычисляем соответствующие токи (см. лекцию 7 стр 13-15)

$(X^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu,\ \Phi_\nu = 0,\ \lambda^\mu_\nu = 0)$

$$\boxed{J^\mu{}_\nu = -\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\nu\varphi - \delta^\mu_\nu\mathcal{L}\right)}$$

индекс, нумерующий 4 разных тока (аналог индекса "a" лекции 7).

$\nu = 0$ соответствует трансляциям $\underline{\delta x^0 = c\,\delta t}$, поэтому $(-cJ^0{}_0)$ должно иметь смысл плотности энергии поля

$\nu = i$ соответствуют пространственным трансляциям, поэтому $J^0{}_i = -J^{0i}$ должны иметь смысл плотностей компонент импульса поля.

Введём обозначение

$$\boxed{T^{\mu\nu} := c\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial^\nu\varphi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}\right\}} \qquad (6)$$

4-тензор 2-го ранга $T^{\mu\nu}$ называется тензором энергии-импульса поля $\varphi(x)$. Как мы выяснили, T^{00} имеет смысл плотности распределения энергии поля $\varphi(x)$, а T^{i0} — плотности распределения i-ой компоненты импульса поля $\varphi(x)$, домноженной на c.

Вычислим $T^{\mu\nu}$ явно для действия (5):

$$\boxed{T^{\mu\nu} = \partial^\mu\varphi\,\partial^\nu\varphi - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\partial^\rho\varphi\,\partial_\rho\varphi\right) + g^{\mu\nu}V(\varphi)} \qquad (6')$$

Поскольку трансляции (5') приводят к банальным сдвигам переменных интегрирования в интеграле (5) и не меняют этого интеграла при произвольном выборе области интегрирования $\omega = V\times[t_1,t_2]\subset\Omega$, мы заключаем, что по теореме Нётер выполняется локальное условие сохранения токов $T^{\mu\nu}$:

$$\boxed{\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0} \qquad (7)$$

[Упражнение: убедитесь прямым вычислением, что это условие выполнено на уравнениях движения поля $\varphi(x)$]

Тензор $T^{\mu\nu}$ обладает еще одним замечательным свойством: он симметричен!

$$\boxed{T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}}$$

Чтобы проинтерпретировать эту симметрию, разберемся в физическом смысле его компонент:

$T^{00} \to$ (плотность распределения энергии поля $\varphi(x)$)

$T^{0i} \to c \times$ (плотность распределения i-ой компоненты импульса поля $\varphi(x)$)

$T^{i0} \to \frac{1}{c} \times$ (плотность потока энергии $\varphi(x)$ в i-м направлении)

Действительно, в силу (7) имеем $\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}(c T^{i0}) = 0$

аналогично для T^{0j}

$T^{ij} \to$ (плотность потока j-ой компоненты импульса $\varphi(x)$ в i-ом направлении.)

Отсюда заключаем:

$$\boxed{\begin{pmatrix}\text{Плотность потока} \\ \text{энергии поля} \\ \text{в } i\text{-м направлении}\end{pmatrix} = c^2 \times \begin{pmatrix}\text{Плотность распределения} \\ i\text{-ой компоненты импульса} \\ \text{поля}\end{pmatrix}}$$

Действительно, поле (когда оно свободно) удовлетворяет волновому уравнению $\Box\varphi = 0$, т.е. ведёт себя как волна, распространяющаяся со скоростью c. Оно подобно безмассовой частице, тоже летающей со скоростью c, для которой $\mathcal{E}_ч = c|\vec{p}_ч|$. Поток энергии такой частицы $\vec{j} = \dot{\vec{x}}\,\mathcal{E}_ч = c^2 \vec{p}_ч$. Эта формула совпадает с той, что мы только что обнаружили для поля $\varphi(x)$.

Итак, симметрия тензора $T^{\mu\nu}$ означает, что энергия поля перетекает в направлении импульса поля. То есть импульс поля занимается переносом его энергии. Аналогично импульс поля переносит свои собственные компоненты ($T^{ij} = T^{ji}$)

Такая физическая интерпретация компонент $T^{\mu\nu}$ требует его симметричности.

В заключение обсудим, как симметрия $T^{\mu\nu}$ проявляет себя ~~при~~ в законах сохранения момента импульса.

Посмотрим какие токи ~~получаются~~ соответствуют симметрии действия относительно преобразований Лоренца:

$$\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

$$\tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \varphi(x) \quad \text{– скалярное поле}$$

Как мы обсуждали в Лекциях 2-3, преобразование

Лоренца может быть представлено в виде

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \left(\exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}\right)\right)^{\mu}{}_{\nu},$$

где $\varepsilon^{\alpha\beta} = -\varepsilon^{\beta\alpha}$ – 6 независимых параметров группы Лоренца, отвечающих 3-м вращениям и 3-м бустам.

$(M_{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu} = -(M_{\beta\alpha})^{\mu}{}_{\nu}$ – 6 образующих алгебры Ли группы Лоренца (см. стр. 19 лекций 2-3). Они имеют вид:

$$\boxed{(M_{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\alpha} g_{\beta\nu} - \delta^{\mu}_{\beta} g_{\alpha\nu}} \qquad (8)$$

По теореме Нётер вычисляем токи, отвечающие преобразованиям Лоренца

$$\left(\chi^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{x}^{\mu}(x|\Lambda)}{\partial \varepsilon^{\alpha\beta}} = -(M_{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu},\ \Phi_{\alpha\beta} = 0,\ \lambda^{\mu}{}_{\alpha\beta} = 0\right)$$

$$\mathcal{M}^{\mu}{}_{\alpha\beta} = -\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi)}\partial_{\nu}\varphi - \delta^{\mu}_{\nu}\mathcal{L}\right)\chi^{\nu}{}_{\alpha\beta} =$$

$$\overset{(6)}{=} \frac{1}{c} T^{\mu}{}_{\nu}(M_{\alpha\beta})^{\nu}{}_{\rho} x^{\rho} \overset{(8)}{=} \frac{1}{c}\left(T^{\mu}{}_{\alpha} x_{\beta} - T^{\mu}{}_{\beta} x^{\alpha}\right)$$

Итак Лоренц-инвариантности действия (5) соответствуют 6 токов

$$\boxed{\mathcal{M}^{\mu\alpha\beta} = -\mathcal{M}^{\mu\beta\alpha} = \frac{1}{c}\left(T^{\mu\alpha}x^{\beta} - T^{\mu\beta}x^{\alpha}\right)} \qquad (9)$$

Причем, так как интеграл (5) Лоренц-инвариантен для любой области интегрирования $\omega = V \times [t_1 t_2]$, то условие сохранения токов локально

$$\boxed{\partial_\mu M^{\mu\alpha\beta} = 0} \qquad (10)$$

Отметим, что тензор момента импульса скалярного поля $M^{\mu\alpha\beta}$ однозначно выражается через тензор его энергии-импульса $T^{\mu\nu}$ (см. (9)). Для нескалярных полей (где $\Phi_{\alpha\beta} \neq 0$) этот факт уже не имеет места.

Замечателен еще один факт: закон сохранения токов $M^{\mu\alpha\beta}$ (10) является следствием закона сохранения $T^{\mu\nu}$ (7) и его симметрии. Действительно,

$$\partial_\mu M^{\mu\alpha\beta} = \frac{1}{c}\partial_\mu \left(T^{\mu\alpha}x^\beta - T^{\mu\beta}x^\alpha\right) \overset{(7)}{=}$$

$$\frac{1}{c}\left(T^{\mu\alpha}\partial_\mu x^\beta - T^{\mu\beta}\partial_\mu x^\alpha\right) = \frac{1}{c}\left(T^{\mu\alpha}\delta^\beta_\mu - T^{\mu\beta}\delta^\alpha_\mu\right)$$

$$= \frac{1}{c}\left(T^{\beta\alpha} - T^{\alpha\beta}\right) = 0.$$

§ 3 Тензор энергии-импульса электромагнитного поля.

Как мы убедились в предыдущем параграфе, свойство симметрии тензора энергии-импульса несёт важную физическую смысловую нагрузку (импульс поля занимается переносом самого себя и энергии). Мы хотим это свойство иметь для всех полевых теорий (не только скалярных). Однако формально рассчитанный (по теореме Нётер) тензор энергии-импульса электромагнитного поля несимметричен. Чтобы понять, как справиться с этой проблемой, обсудим произвол в определении сохраняющихся токов в теореме Нётер.

В механике добавление к действию члена $\frac{d}{dt}\left(\lambda(q_i(t),t)\right)$ не меняет уравнений Эйлера-Лагранжа. Чтобы такая добавка не испортила условий применимости теоремы Нётер ($\delta S = \tilde{S} - S = 0$) требуется

$$\lambda(q_i(t), t)\Big|_{t_1}^{t_2} \underset{\text{на уравнениях движения}}{=} 0 \quad \forall\, t_1, t_2$$

то есть $\lambda(q_i(t), t) = \text{Const}(t) \Rightarrow \frac{\partial \lambda}{\partial q_i} = 0, \frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0,$

с учётом того, что $\dot{q}_i$ — произвольно выбираемые начальные данные для траектории движения системы.
Итак добавка $\lambda = \text{const}$ — единственная возможность

не испортить законов сохранения в механике.

Законы сохранения в механике определены с точностью до аддитивной константы.

В теории поля ситуация гораздо более неоднозначная. Не испортив условия применимости теоремы Нётер мы можем добавить к действию член $\partial_\mu \Lambda^\mu(\varphi^A(x), x)$, где функции Λ^μ удовлетворяют на уравнениях движения условиям:

для $\Omega = \mathbb{R}^3 \times [t_1, t_2]$: $\Lambda^\mu \xrightarrow[|\vec{x}| \to \infty]{} o\left(\frac{1}{|\vec{x}|^2}\right)$, $\Lambda^0 = \mathrm{Const}(t)$, но может зависеть от $\vec{x}$.

для $\omega = V \times [t_1, t_2]$: $(\vec{\Lambda}\vec{n})\big|_{\partial V} = 0$, $\Lambda^0 = \mathrm{Const}(t)$ но может зависеть от $\vec{x}$.
где $\vec{n}$ нормаль к ∂V

для локального закона сохранения требуется

$$\boxed{\partial_\mu \Lambda^\mu \underset{\text{движения}}{\overset{\text{на уравнениях}}{=}} 0}$$

Даже последнее, наиболее сильное условие имеет множество нетривиальных решений. Например

$$\boxed{\Lambda^\mu = \partial_\nu B^{\mu\nu}}, \text{ где}$$

$B^{\mu\nu}$ – произвольный кососимметричный тензор: $B^{\mu\nu} = -B^{\nu\mu}$ – годится. Такая добавка в действие приводит к изменению токов (16)

$$\boxed{J^\mu \mapsto J^\mu + \partial_\nu B^{\mu\nu}} \quad (B^{\nu\mu} = -B^{\mu\nu}) \tag{11}$$

Таким образом, в теории поля теорема Нётер несёт в себе произвол в определении токов, который сводится к перераспределению плотности сохраняющейся величины в пространстве:

$$\boxed{J^0 \mapsto J^0 + \vec{\nabla}\vec{B}} \quad ((\vec{B})^i = B^{0i})$$

Этот произвол должен фиксироваться с учётом физической интерпретации J^μ, и никак иначе. В случае тензора напряженности э.-м. поля $T^{\mu\nu}$ — это условие его симметрии.

Приступим к построению тензора энергии импульса э.-м. поля. Формальное применение теоремы Нётер даёт (ср. с (6))

$$\boxed{T^{\mu\nu}_{(?)} := c\left\{\frac{\partial \mathcal{L}_{э.-м.}}{\partial(\partial_\mu A_\rho)}\partial^\nu A_\rho - g^{\mu\nu}\mathcal{L}_{э.-м.}\right\}}$$

где $\mathcal{L}_{э.-м.} = -\frac{1}{16\pi c} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ — лагранжева плотность свободного э.-м. поля. Проведя вычисление, получаем

$$\boxed{T^{\mu\nu}_{(?)} = -\frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}(F^{\rho\lambda}F_{\rho\lambda})\right)}$$

Формально есть локальный закон сохранения

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}_{(?)} \overset{\text{на ур. движ.}}{=} 0.$$

Однако сама величина $T^{\mu\nu}_{(?)}$ никуда не годится: мало того, что она несимметрична, она еще зависит от <u>нефизических полей</u> $\partial^\nu A_\rho$! Она не может быть наблюдаемой в эксперименте величиной.

Воспользуемся нашим правом на поправку, и выберем её в виде: $\underline{\frac{1}{4\pi}F^{\mu\rho}\partial_\rho A^\nu}$. Убедимся, что такая поправка действительно имеет вид (11) <u>на уравнениях движения поля</u>

$$\frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\rho}\partial_\rho A^\nu\right) \overset{\partial_\rho F^{\mu\rho}=0 \;\leftarrow\; \text{ур. движ. поля}}{=\!=} \frac{1}{4\pi}\partial_\rho\left(F^{\mu\rho}A^\nu\right)$$

Итак, наша добавка к $T^{\mu\nu}_{(?)}$ имеет вид

$$\boxed{\begin{gathered} T^{\mu\nu}_{(?)} \longmapsto T^{\mu\nu}_{(?)} + \partial_\rho B^{\mu\nu\rho}, \quad \text{где } B^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{4\pi}F^{\mu\rho}A^\nu, \\ \text{то есть } B^{\mu\nu\rho} = -B^{\rho\nu\mu} \end{gathered}}$$

Условия теоремы Нётер не нарушены, а получившийся тензор имеет вид

$$\boxed{T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\rho}F^{\nu}{}_{\rho} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}\left(F^{\rho\lambda}F_{\rho\lambda}\right)\right)} \quad (12)$$

Этот тензор зависит только от физических полей $F^{\mu\nu}$, и он симметричен относительно $\mu \leftrightarrow \nu$. Этот тензор называется <u>тензором энергии-импульса электромагнитного поля</u>.

<u>Упражнение</u>: Убедитесь прямым вычислением, что на уравнениях движения э.-м. поля

$$\boxed{\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0}$$

Нам осталось вычислить явно компоненты этого тензора и сравнить их с результатами §1:

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2(\vec{H}^2 - \vec{E}^2)$$

$$T^{00} = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{H}^2)$$

$$T^{0i} = T^{i0} = \frac{1}{4\pi}\vec{E}\times\vec{H} = \frac{1}{c}\vec{S}$$

← в полном согласии с §1 (см. стр 4) и §2 (см стр 10)

Для полноты картины приведем еще выражения для T^{ij}:

$$\boxed{T^{ij} = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\delta^{ij}}{2}(\vec{E}^2 + \vec{H}^2) - E^i E^j - H^i H^j\right\}}$$

Отметим также еще одно свойство тензора энергии-импульса э.-м. поля:

$$\boxed{T^\mu{}_\mu = 0}$$ – <u>он бесследовый</u>.

Скалярное поле, вообще говоря, этим свойством не обладает. (см. (6!))