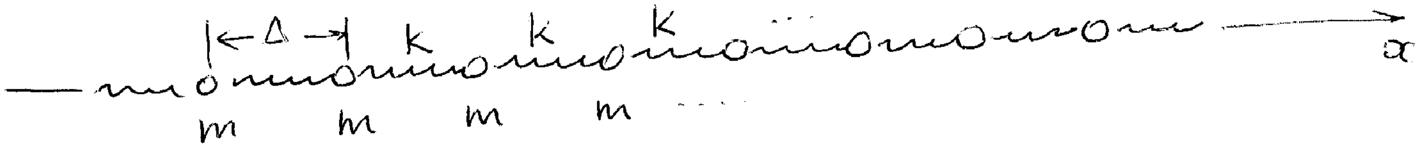
(1) Предельный переход от механических систем к полевым.

Рассмотрим систему масс на пружинках:



m – масса грузиков (у всех одна и та же)

k – коэффициент жесткости пружинок (одинаковый)

Δ – расстояние между грузиками в состоянии покоя

$x_n = n\Delta$ – равновесная координата n-ой массы

Обобщённые координаты системы – q_n – отклонение n-ого грузика от его равновесного положения.

Лагранжиан системы:

$$L(q_n, \dot{q}_n) = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{m\dot{q}_n^2}{2} - \frac{k}{2}(q_{n+1} - q_n)^2 \right)$$

Мы полагаем $q_0 = q_{N+1} = 0$, если система имеет закрепленные концы. Всего грузиков – N штук.

Если же положить $q_{N+1} = q_0$, то получаем систему грузиков на кольце. Всего – $N+1$ грузик.

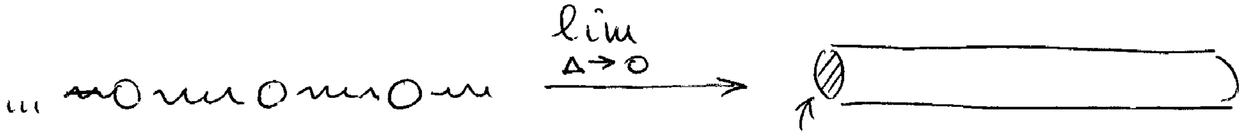
Уравнения Эйлера-Лагранжа системы:

$$\boxed{m\ddot{q}_n = k(q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1})}$$

(длина всей системы)

Рассмотрим предел $\Delta \to 0$, $N = \frac{L}{\Delta} \to \infty$.

При этом мы будем сохранять постоянной плотность распределения масс в системе



S – площадь сечения стержня

В предельном переходе система превращается в однородный упругий стержень

$$\rho = \frac{m}{\Delta \cdot S} \text{ — плотность стержня } (=\text{const})$$

Коэффициент жесткости пружинок, как и масса m, тоже меняется с уменьшением Δ:

$$k = E \cdot \frac{S}{\Delta}$$

S ← характеризует "толщину" пружинки

Δ ← длина пружинки

Здесь $E = \text{const}$ – модуль упругости Юнга (упругость по отношению к продольному сжатию/растяжению).
E – характеристика материала стержня.

Переобозначим в пределе:

$$q_n(t) \xrightarrow{\Delta \to 0} \varphi(n \cdot \Delta, t) = \varphi(x_n, t)$$

$\varphi(x,t)$ характеризует продольное смещение стержня относительно состояния равновесия в точке x.

Предельный переход в уравнении движения:

$$\ddot{\varphi}(x_n,t) = \frac{E}{\rho\Delta^2}\left(\varphi(x_n+\Delta,t) - 2\varphi(x_n,t) + \varphi(x_n-\Delta,t)\right) =$$

$$= \frac{E}{\rho}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,t)\Big|_{x=x_n} + O(\Delta)\right)$$

Получаем уравнение 2-го порядка в частных производных

$$(*)\ \boxed{\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varphi(x,t) = \left(\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x,t) = 0}$$

Здесь $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

Полученное уравнение описывает волны (деформации) в одном пространственном измерении в среде в одном пространственном измерении.

Его общее решение (см. среднее равенство в (*)):

$$\varphi(x,t) = f(x+vt) + g(x-vt),$$

где f и g - произвольные функции.

f/g — волны деформаций в стержне, бегущие влево/вправо.

Параметр v имеет смысл скорости распространения волны.

(*) и его обобщения на пространства большей размерности носит название <u>волнового уравнения</u>

2 Скалярное свободное поле

Обобщение волнового уравнения (*) на пространства большей размерности: заменим $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ оператором Лапласа $\Delta = \nabla^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, N – размерность пространства, где действует оператор.

$$\boxed{\Box := \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}}$$ – даламбертиан, носит имя Ж. Д'Аламбера (J. D'Alembert), который в 1747 г. рассматривал решения простейшего (правда, неоднородного) волнового уравнения (*).

Общее <u>волновое уравнение</u>:

$$\boxed{\Box\, \varphi(\bar{x}, t) = 0}$$

Мы в дальнейшем будем рассматривать случай, когда $v = c$, $N = 3$. Тогда

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_\mu \partial_\nu g^{\mu\nu}.$$

(свертка верхних и нижних индексов)

! Этот оператор <u>инвариантен</u> относительно преобразований группы Пуанкаре:

$$\Box = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x'_\mu}\frac{\partial}{\partial x'^\mu}, \text{ где } x'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} x^\nu + a^\mu$$

Встаёт вопрос: как должно преобразовываться под действием группы Пуанкаре поле $\varphi(x)$, чтобы решение волнового уравнения переводилось снова в решение?

$$x \xrightarrow{(\Lambda, a)} \underbrace{\Lambda}_{\text{лоренцевы повороты}} x + \overbrace{a}^{\text{трансляции}} = x'$$

$$\varphi(x) \xrightarrow{(\Lambda, a)} \varphi'(x')$$

так чтобы $\Box\varphi(x) = 0 \Rightarrow \Box'\varphi'(x') = 0$?

Так как $\Box' = \Box$, то простейший вариант ответа: $\boxed{\varphi'(x') = \varphi(x)}$, то есть

$$\boxed{\varphi'(x) = \varphi(\Lambda^{-1}(x-a))}$$

Поля с таким законом преобразования называются <u>скалярными</u>.

<u>Rem:</u> Если группа G действует на множестве Ω:

$$\forall g \in G: \quad g \triangleright \omega = \omega', \quad \omega, \omega' \in \Omega,$$

то на пространстве функций на Ω задаётся двойственное действие G:

$$\forall g \in G: \quad g \triangleright (f(\omega)) = f'(\omega) = f(g^{-1} \triangleright \omega),$$

$$\forall f \in \mathrm{Fun}(\Omega)$$

Это и есть закон <u>преобразования скалярных полей</u>.

<u>Rem:</u> Обычно, когда говорят о функциях на пространстве Минковского, то задают правила

их вычисления в ~~...~~ произвольной инерциальной системе отсчета. Далеко не всякая таким образом заданная функция будет скалярным полем. Например $\varphi(x^\mu) = x^0$ – не скаляр,

т.к. $\varphi'(x'^\mu) = x'^0 \neq x^0 = \varphi(x^\mu)$.

А вот $\varphi(x^\mu) = x^\mu x_\mu$ – скалярное поле.

Rem: Какие еще бывают поля? Например, векторное поле $A^\mu(x)$ – это набор из 4-х полей $A^\mu(x) = (A^0(x), A^1(x), A^2(x), A^3(x))$, преобразующихся по закону

$$\boxed{A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_{\ \nu} A^\nu(x)}$$

Для него также очевидно $\Box A^\mu(x) = 0 \Leftrightarrow \Box' A'^\mu(x') = 0$.

Заметим, что поле $A^\mu(x)$, преобразующееся по закону $A'^\mu(x') = A^\mu(x)$ не векторное, а набор 4-х скалярных полей.

Rem: Электромагнитные волны задаются с помощью векторного поля $A^\mu(x) : M_4 \to \mathbb{R}^{\times 4}$.

Есть еще спинорные поля $\psi(x) : M_4 \to \mathbb{C}^{\times 4}$.

Они встречаются в квантовой электродинамике и описывают электроны и другие ~~...~~ частицы.

О них – не сейчас.

(3) Лагранжиан и уравнения движения свободного скалярного поля. (7)

Можно ли получить волновое уравнение $\Box\varphi(x)=0$ как уравнение Эйлера-Лагранжа для некоторого действия? Рассмотрим действие

$$\boxed{S[\varphi(x)] = \int\limits_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} dx^0 \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x\, \mathcal{L} \equiv \int\limits_{\Omega} d^4x\, \mathcal{L},}$$

где

(*) интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x$ для поля $\varphi(x^\mu)=\varphi(x^0,\vec{x})$ заменяет сумму $\sum\limits_i$ для переменных $q_i(t)$ в механических моделях

(**) Ω — область в 4-мерном пространстве Минковского M_4, ограниченная пространственной бесконечностью ($|\vec{x}|\to\infty$) и двумя пространственно-подобными гиперповерхностями Σ_1 и Σ_2 в M_4

[Def: Пространственно-подобная гиперповерхность Σ такова, что в $\forall$ ее точке p касательное пространство $T_p\Sigma$ состоит из пространственно-подобных векторов a^μ: $\boxed{a^\mu a_\mu < 0}$]

(***) Лагранжева плотность $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi, \underbrace{\partial^2_{\dots}\varphi, \dots}_{\text{экзотика}})$ —

- скаляр относительно преобразований Пуанкаре
- имеет в своём составе частные производные полей — $\partial_\mu\varphi$ — не выше 1-го порядка

— для свободных теорий — квадратична по полям $\varphi(x)$

В случае свободного скалярного поля $\varphi(x)$

выбираем: $\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - \frac{m^2}{2}\varphi^2}$

Ограничимся случаем $\Sigma_{1,2}$: $x^0_{1,2} = \text{const}$

Для сходимости интегралов в $S[\varphi]$ ~~при~~ потребуем

$\varphi(x^0, \vec{x}) \to 0$ достаточно быстро при $|\vec{x}| \to \infty$

Согласно принципу наименьшего действия, проварьируем $S[\varphi]$ по $\varphi(x)$, считая что вариации поля на границах области Ω зануляются:

$$\delta\varphi\Big|_{\Sigma_{1,2}} = 0, \text{ т.е. } \forall \vec{x} \quad \delta\varphi(x^0_1, \vec{x}) = \delta\varphi(x^0_2, \vec{x}) = 0$$

$$\delta\varphi\Big|_{|\vec{x}|=\infty} = 0, \text{ т.е. } \forall x^0 \quad \delta\varphi(x^0, \vec{x}) \xrightarrow{|\vec{x}|\to\infty} 0.$$

$$\delta S[\varphi] = \int\limits_\Omega d^4x \left(\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu(\delta\varphi) - m^2\varphi\,\delta\varphi\right) =$$

(берем по частям) $= \underbrace{\int\limits_\Omega d^4x\,\partial^\mu(\partial_\mu\varphi\,\delta\varphi)}_{\text{по теореме Стокса}} - \int\limits_\Omega d^4x\,(\Box\varphi + m^2\varphi)\cdot\delta\varphi$

$$\int\limits_{\partial\Omega} \underbrace{d\sigma^\mu}_{\substack{\uparrow\\ \text{элемент}\\ \text{границы } \partial\Omega}} (\partial_\mu\varphi\,\delta\varphi) = 0, \text{ т.к. } \delta\varphi\Big|_{\partial\Omega} = 0$$

Из условия $\delta S = 0$ при $\forall\, \delta\varphi$ (9)

получаем уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\boxed{(\Box + m^2)\varphi = 0}$$

Это – уравнение Клейна-Гордона для массивного скалярного поля $\varphi(x^\mu)$.

* m – параметр "массы". Это масса элементарных возбуждений (квантов) квантового скалярного поля. Она естественным образом интерпретируется в квантовой теории поля. Рассматривая колебания классического стержня, мы "m" не получали.

* поле $\varphi(x)$ – свободное, то есть его уравнения линейны и однородны – следствие квадратичности $\mathcal{L}$ и φ. Для таких полей справедлив принцип суперпозиции: $\forall$ линейная комбинация решений снова является решением.

* Для более общего лагранжиана скалярного поля:

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - V(\varphi)}$$

уравнение Э.-Л.: $\boxed{\Box\varphi + \frac{dV}{d\varphi} = 0}$

Если $V(\varphi)$ имеет экстремум в φ_0: $\left.\frac{dV}{d\varphi}\right|_{\varphi_0} = 0$, то $\varphi(x) = \varphi_0 = \mathrm{const}$ – стационарное решение. В его малой окрестности $\boxed{\varphi(x) = \varphi_0 + \varepsilon\chi(x) + o(\varepsilon)}$ $\chi(x)$ – скалярное свободное поле с массой $\boxed{m^2 = \frac{1}{2}\left.\frac{d^2V}{d\varphi^2}\right|_{\varphi_0}}$

3,5 Общий вид уравнений Эйлера-Лагранжа в полевых моделях

Для набора полей $\varphi^A(x)$, $A=1,2,\ldots$

рассмотрим действие общего вида:

$$S[\varphi^A(x)] = \int_{\Omega\subset M_4} d^4x\, \mathcal{L}(\varphi^A, \partial_\mu\varphi^A),$$

где $\mathcal{L}$ - лагранжева плотность — вещественный пуанкаре-скаляр

Ω - область в пространстве Минковского M_4 с границей

вида $\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup$ (бесконечность в $\mathbb{R}^3$)

Σ_1, Σ_2 — пространственно-подобные гиперповерхности в M_4; $\mathbb{R}^3$ — пространственные коорд.

(Обычно $\Sigma_{1,2}$: $x^0 = \mathrm{const}_{1,2}$).

Принцип наименьшего действия:

$$\delta S = \left[\begin{matrix}\text{Линейная по } \delta\varphi^A\\ \text{часть}\end{matrix}\right] S[\varphi^A+\delta\varphi^A] - S[\varphi^A] = 0$$

при условиях $\delta\varphi^A\big|_{\partial\Omega} = 0$

$$\Downarrow$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\boxed{\mathcal{L}^A := \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^A)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^A}\right) = 0}$$

4) Решение уравнения Клейна-Гордона

Ищем решение в виде плоской волны $\varphi_p(x) = e^{-ipx}$

Здесь $p = (p_0, \bar{p})$ – 4-вектор, $p \cdot x = p_\mu x^\mu$.

$$(\Box + m^2)\varphi_p(x) = (-p^2 + m^2) e^{ip\cdot x} = 0$$

$$\Downarrow$$

Условие: $\boxed{p^2 = m^2}$ $(p^2 = p_\mu p^\mu)$

При таких значениях p_μ $\varphi_p(x)$ решает уравнение Клейна-Гордона, но $\varphi_p(x)$ не удовлетворяет граничным условиям: $\varphi_p(x) \xrightarrow{|x| \to \infty} 0$.

Ищем хорошее решение в виде суперпозиции плоских волн: (использ. линейность!)

$$\boxed{\varphi(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot x} \tilde{a}(p)} \quad (\star)$$

Здесь $\tilde{a}(p^0, \bar{p})$ – функция, которую надо определить.

$$(\Box + m^2)\varphi = 0 \implies (-p^2 + m^2)\tilde{a}(p) = 0$$

В обычных функциях это уравнение имеет лишь тривиальное решение $\tilde{a}(p) = 0$. Но нас устраивает и решение в виде обобщённой функции: мы ведь подставляем $\tilde{a}(p)$ в интеграл. В классе обобщенных функций есть решение:

$$\boxed{\tilde{a}(p) = \delta(p^2 - m^2)\, a(p),}$$

где $a(p)$ – любая функция (важно ее поведение на гиперпов. $p^2 = m^2$)

Подставляем решение $\tilde{a}(p)$ в ($\star$) и вычисляем интеграл по p^0, пользуясь правилом интегрирования δ-ф-ции Дирака от сложного аргумента:

$$\boxed{\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{\left|\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_i}\right|}, \text{ где } x_i : f(x_i)=0, \; f'(x_i)\neq 0}$$

В нашем случае: $f(p^0) = p^2 - m^2 = p^{0\,2} - (\bar{p}^2 + m^2)$.

$$f(p^0) = 0 \iff p^0 = \pm \underbrace{\sqrt{\bar{p}^2 + m^2} \overset{def}{=} \pm\,\omega(\bar{p})}\,,$$

то есть
$$\delta(p^2 - m^2) = \frac{\delta(p^0 - \omega(\bar{p}))}{2\omega(\bar{p})} + \frac{\delta(p^0 + \omega(\bar{p}))}{2\omega(\bar{p})}.$$

Итак:
$$\boxed{\begin{aligned} &\varphi(x) = \varphi^+(x) + \varphi^-(x), \text{ где} \\ &\varphi^\pm(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^4}\, e^{\pm ip\cdot x}\, \frac{a^\pm(\bar{p})}{2\omega(\bar{p})}\Bigg|_{p^0 = \omega(\bar{p}) = \sqrt{\bar{p}^2 + m^2}} \end{aligned}}$$

<u>Rem</u>: $\varphi^\pm(x)$ называются положительно-/отрицательно-частотными компонентами поля $\varphi(x)$. В квантовой теории поля $\hat{\varphi}^\pm(x)$ отвечают за рождение/уничтожение квантов поля $\hat{\varphi}$.

<u>Rem</u>: условие вещественности поля φ: $\overline{\varphi(x)} = \varphi(x)$ приводит к $\overline{\varphi^+(x)} = \varphi^-(x)$, и к $\overline{a^+(p)} = a^-(p)$.

5 (Первая) Теорема Нётер для полевых моделей

Рассмотрим группу непрерывных преобразований координат пространства Минковского и полей φ^A вида:

$$(1)\quad \begin{cases} x^\mu \xmapsto{g(\xi)} \tilde{x}^\mu(x|\xi) = g(\xi)\circ x^\mu \\ \varphi^A(x) \xmapsto{g(\xi)} \tilde{\varphi}^A(\varphi, x|\xi) = \tilde{\varphi}^A(\tilde{x}) = g(\xi)\circ\varphi^A(x) \end{cases}$$

Здесь $\xi = \{\xi^a\}_{a=1..k}$ – набор координат действующего элемента группы $g(\xi)\in G$. G – группа Ли размерности k.

Полагаем $g(\xi)\big|_{\xi=0} = 1_G$, так что

$$\begin{cases} \tilde{x}^\mu(x|0) = x^\mu \\ \tilde{\varphi}^A(\varphi, x|0) = \varphi^A(x) \end{cases}$$

Под такой группой G мы в первую очередь подразумеваем группу Пуанкаре, но у полевых моделей бывают и другие группы симметрий.

Нас интересует случай, когда действие группы G не меняет действия $S[\varphi]$ полевой модели:

$$\tilde{S}[\tilde{\varphi}] = S[\varphi],$$

а значит и уравнений Эйлера-Лагранжа. Это случается, если лагранжева плотность $\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi)$ изменяется на 4-дивергенцию

$$(2)\quad \boxed{\mathcal{L} \xrightarrow{g(\xi)} \tilde{\mathcal{L}}(\varphi, \partial\varphi) = \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) + \partial_\mu\left(\Lambda^\mu(\varphi, x|\xi)\right)},$$

где Λ^μ – произвольная функция, удовлетворяющая граничным условием

$$\boxed{\begin{aligned} &\Lambda^\mu(\varphi, x|\xi)\Big|_{\partial\Omega} = 0 \\ &\Lambda^\mu(\varphi, x|0) = 0 \end{aligned}}$$

<u>Теорема</u> (<u>1 теорема Нётер для полевых моделей</u>)

Если действие полевой модели инвариантно относительно преобразований (1), (2), то модель обладает набором из k <u>сохраняющихся токов</u> $J^\mu_a(\varphi, \partial\varphi, x)$, $a = 1\ldots k$:

$$(3)\quad \boxed{\int\limits_\Omega d^4x\, \partial_\mu J^\mu_a(\varphi, \partial\varphi, x) = 0}$$

Это, так называемое, условие сохранения токов J^μ_a.

Токи имеют вид:

$$\boxed{J^\mu_a = \sum_A \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^A)} \cdot \Phi^A_a(\varphi, x) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^A)} \cdot \partial_\nu \varphi^A - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \right) X^\nu_a(x) + \lambda^\mu_a(\varphi, x) \right.}$$

где

$$\boxed{\begin{aligned} \Phi^A_a(\varphi, x) &= \frac{\partial \tilde{\varphi}^A(\varphi, x|\xi)}{\partial \xi^a}\Big|_{\xi=0} \\ X^\mu_a(x) &= \frac{\partial \tilde{x}^\mu(x|\xi)}{\partial \xi^a}\Big|_{\xi=0} \\ \lambda^\mu_a(\varphi, x) &= \frac{\partial \Lambda^\mu(\varphi, x|\xi)}{\partial \xi^a}\Big|_{\xi=0} \end{aligned}}$$

Доказательство: Чтобы не загромождать формул индексами. будем считать, что у нас единственная переменная $\xi^a = \xi$. Проварьируем действие модели в окрестности единицы группы G: $\xi = 0$.

$$0 \overset{\text{по условию теоремы}}{=} \delta S = \tilde{S}[\tilde{\varphi}] - S[\varphi] =$$

$$= \int\limits_{\tilde{\Omega} = g(\xi)\circ\Omega} d^4\tilde{x}\, \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\varphi}(\tilde{x}), \tilde{\partial}\tilde{\varphi}(\tilde{x})) - \int\limits_{\Omega} d^4 x\, \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x))$$

$$= \int\limits_{\tilde{\Omega}} d^4\tilde{x}\, \underbrace{\tilde{\partial}_\mu \Lambda^\mu(\tilde{\varphi}, \tilde{x}|\xi)}_{\partial_\mu \lambda^\mu(\varphi, x)\cdot\xi + o(\xi)} + \int d^4 x \left\{ \underbrace{\left| \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} \right|}_{1 + \partial_\mu X^\mu(x)\xi + o(\xi)} \mathcal{L}(\tilde{\varphi}, \tilde{\partial}\tilde{\varphi}) - \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) \right\}$$

// Якобиан замены $\tilde{x} \mapsto x$

$$= \int_\Omega d^4x \Big\{ \Big(\partial_\mu \lambda^\mu + \underbrace{\partial_\mu \chi^\mu \cdot \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi)}_{\text{берём по частям}} \Big)\xi +$$

$$+ \Big(\mathcal{L}(\tilde\varphi(\tilde x), \tilde\partial\tilde\varphi(\tilde x)) - \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x)) \Big) \Big\} + o(\xi)$$

$$= \int_\Omega d^4x\, \partial_\mu \{ \lambda^\mu + \chi^\mu \cdot \mathcal{L} \} \xi - \int_\Omega d^4x\, \chi^\mu \partial_\mu \mathcal{L} \cdot \xi +$$

$$+ \int_\Omega d^4x \Big(\mathcal{L}(\tilde\varphi(\tilde x), \partial\tilde\varphi(\tilde x)) - \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x)) \Big) + \Big(\mathcal{L}(\tilde\varphi, \tilde\partial\tilde\varphi) - \mathcal{L}(\tilde\varphi, \partial\tilde\varphi) \Big) + o(\xi)$$

$$= \int_\Omega d^4x\, \partial_\mu \{ \lambda^\mu + \chi^\mu \mathcal{L} \} \xi -$$

$$- \int_\Omega d^4x\, \chi^\mu \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^A} \partial_\mu \varphi^A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi^A)} \partial_\mu \partial_\nu \varphi^A \Big] \cdot \xi +$$

тут подставим $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^A} = \partial_\nu \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi^A)} \Big)$ – уравнения Э.-Л.

$$+ \int_\Omega d^4x \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^A} (\Phi^A \cdot \xi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \Phi^A)} \partial_\nu (\Phi^A \xi) \Big] +$$

это от $\tilde\varphi^A - \varphi^A$

$$+ \int_\Omega d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi^A)} \Big(-\partial_\nu \chi^\mu \cdot \partial_\mu \varphi^A \Big) \xi + o(\xi) =$$

это от $\tilde\partial_\nu \varphi^A - \partial_\nu \varphi^A = \Big\{ \delta^\mu_\nu - \frac{\partial \tilde x^\mu}{\partial x^\nu} \Big\} \tilde\partial_\mu \varphi^A =$

$= -(-\partial_\nu \chi^\mu \cdot \xi) \cdot \partial_\mu \varphi^A + o(\xi)$

$$= \int_\Omega d^4x\, \partial_\mu \{\lambda^\mu + X^\mu \mathcal{L}\}\,\xi - \int_\Omega d^4x\, X^\mu \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi^A)}\,\partial_\mu \varphi^A\right)\cdot\xi$$

сгруппируем эти члены

$$+ \int_\Omega d^4x\, \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi^A)}\,\phi^A\right)\xi - \int_\Omega d^4x\, \partial_\nu X^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi^A)}\,\partial_\mu \varphi^A\right)\cdot\xi + o(\xi) =$$

переобозначим индексы суммирования $\mu \leftrightarrow \nu$

$$= \int_\Omega d^4x\, \underbrace{\partial_\mu \left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^A)}\,\phi^A - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^A)}\,\partial_\nu \varphi^A - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}\right) X^\nu + \lambda^\mu\right\}}_{\partial_\mu J^\mu}\cdot\xi + o(\xi)$$

Отсюда, дифференцируя по ξ и полагая $\xi = 0$, получаем утверждение теоремы. $\square$

Обратим внимание, что вывод теоремы Нётер справедлив для любой 4-области Ω, конкретного вида $\Omega = \mathbb{R}^3 \times [t_1, t_2]$ он не эксплуатирует.

Таким образом, если условия теоремы выполнены для некоторой области $\omega = V \times [t_1, t_2] \subset \Omega$, $V \subset \mathbb{R}^3$,

то есть если $\boxed{\delta S \text{ (при интегрировании по } \omega) = 0}$,

то

$$\boxed{\int_{\omega = V\times[t_1,t_2]} d^4x\, \partial_\mu J^\mu_a = 0} \qquad (3a)$$

В случае же, если $\delta S = 0$ при интегрировании по $\omega = V \times [t_1, t_2]$ для $\forall V \in \mathbb{R}^3$, мы имеем локальное условие (18)

$$\boxed{\partial_\mu J^\mu_a = 0}, \qquad (3б)$$

называемое <u>уравнением непрерывности</u>.

Обсудим, к каким последствиям приводит условие сохранения тока (3) или (3а). Применим к нему теорему Стокса:

$$0 \doteq \int\limits_{\omega = V\times[t_1,t_2]} d^4x\, \partial_\mu J^\mu_a = \left(\int\limits_V d^3x\, J^0_a \right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} +$$

$$+ c \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\partial V} (\vec{J}_a, \vec{n})\, d\sigma$$

Здесь $J^\mu_a = (J^0_a, \vec{J}_a)$; $\vec{n}$ – вектор внешней нормали к поверхности ∂V, ограничивающей область V.

Вводя обозначения

$$Q_a(t) = \int\limits_V d^3x\, J^0_a(\vec{x}, t) \; ; \quad \vec{I}_a(\vec{x}, t) = c \vec{J}_a(\vec{x}, t)$$

и учитывая произвольность моментов времени t_1 и t_2, мы можем переписать условия сохранения тока в дифференциальном виде:

$$\boxed{\frac{dQ_a}{dt} = -\int\limits_{\partial V} (\vec{I}_a, \vec{n})\, d\sigma} \quad (4)$$

В случае, когда $V = \mathbb{R}^3$, предполагая, что $\vec{J}_a$ при $|\vec{x}| \to \infty$ убывают быстрее $1/|\vec{x}|^2$, получаем законы сохранения в виде:

$$\boxed{Q_a(t)_{\left(\text{во всем } \mathbb{R}^3\right)} = \mathrm{const}} \quad (4a)$$

Отметим, что условия (4) более тонкое (локальное), чем законы сохранения (4a). Они утверждают, что изменение величин $Q_a(t)$ в объеме V происходит исключительно за счет перетекания их через границы области V, причем

$J^0_a(\vec{x}, t)$ — плотность распределения сохраняющейся величина Q_a

$\vec{I}_a(\vec{x}, t) = c\vec{J}_a$ — плотность потока этой величины.

Такое устройство законов сохранения в теории поля исключает ситуацию, когда у сохранеющейся величины уменьшается её величина в одной области пространства и одновременно на ту же величину увеличивается ее величина в другой области. Такой закон сохранения ~~[illegible]~~ вступал бы в противоречие с принципом относительности, поскольку события, одновременные в одной инерциальной системе отсчёта, перестают быть одновременными в других инерциальных системах.

Тонкая (локальная) структура (4) законов сохранения в теории поля исключает такую ситуацию.