

Семинар 12

Всюду в задачах $\text{char } \mathbf{k} \neq 2$.

Задача 1. Пусть $C_1 = \{x_1, x_2\}$ и $C_2 = \{y_1, y_2\}$ – две квадрики (т.е. пары точек) в $\mathbb{P}^1$ с уравнениями $C_1 = \{\Phi_1(x_1, x_2) = 0\}$ и $C_2 = \{\Phi_2(x_1, x_2) = 0\}$, где $\Phi_i(x_1, x_2)$, $i = 1, 2$, – ненулевые квадратичные формы от двух переменных. Пучком квадрик на $\mathbb{P}^1$, порожденным квадратиками C_1 и C_2 , (или натянутым на квадрики C_1 и C_2), называется множество $\langle C_1, C_2 \rangle$ квадратик на $\mathbb{P}^1$ вида $C(\lambda) = \{\Phi_1(x_1, x_2) + \lambda\Phi_2(x_1, x_2) = 0\}$, где $\lambda \in \mathbf{k} \cup \{\infty\}$.

а) Докажите, что если $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, то пучок квадрик $\langle C_1, C_2 \rangle$ есть множество пар точек $\{x_1, x_2\}$ на $\mathbb{P}^1$ таких, что $x_2 = f(x_1)$, где $f : \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1$ – инволюция, т.е. такое проективное преобразование прямой $\mathbb{P}^1$, отличное от тождественного, что $f^2 = \text{id}$.

б) Сколько в пучке $\langle C_1, C_2 \rangle$ может быть сдвоенных точек, т.е. квадратик вида $\{x, x\}$, $x \in \mathbb{P}^1$.

в) Пусть A и B – две различные сдвоенные точки в пучке квадрик $\langle C_1, C_2 \rangle$ на $\mathbb{P}^1$. Докажите, что в этом случае для любой квадрики $C(\lambda) = \{X_1, X_2\}$ этого пучка пара точек X_1, X_2 гармонически делит пару точек A, B .

Задача 2. Даны три различные точки A, B, C на прямой $\mathbb{P}^1$. Построим точки $A', B', C' \in \mathbb{P}^1$ такие, что пара A, A' гармонически делит пару B, C , пара B, B' гармонически делит пару A, C , а пара C, C' гармонически делит пару A, B . Докажите, что пары точек $\{A, A'\}$, $\{B, B'\}$ и $\{C, C'\}$, рассматриваемые как квадрики на $\mathbb{P}^1$, принадлежат одному пучку квадрик.

Пусть C – невырожденная коника в $\mathbb{P}^2$ с уравнением $\Phi(x_0, x_1, x_2) = 0$, где $\Phi(x_0, x_1, x_2) = \sum_{i,j=0}^2 a_{i,j}x_ix_j$ – квадратичная форма, матрица $A = (a_{i,j})$ которой имеет ранг 3. Полярной точки $\tilde{x} = (\tilde{x}_0 : \tilde{x}_1 : \tilde{x}_2) \in \mathbb{P}^2$ относительно коники C называется проективная прямая в $\mathbb{P}^2$ с уравнением $L(x) := \sum_{i,j,k=0}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\tilde{x})x_j = 0$. Так как ранг матрицы A равен 3, для каждой проективной прямой l в $\mathbb{P}^2$ найдется единственная точка $\tilde{X} \in \mathbb{P}^2$, для которой l является полярной относительно C . Эта точка $\tilde{X}$ называется полюсом прямой l относительно коники C .

Задача 3. Дан эллипс C в аффинной плоскости (над $\mathbb{R}$) и точка X внутри эллипса, отличная от центра симметрии эллипса. С помощью линейки постройте полярную точки X относительно эллипса.

Задача 4. Пусть C_1 – невырожденная коника в $\mathbb{P}^2$, а C_2 – сдвоенная прямая в $\mathbb{P}^2$, пересекающая конику C_1 в двух различных точках A_1 и A_2 . Докажите, что в пучке коник $\langle C_1, C_2 \rangle$ найдется единственная коника, распавшаяся в пару прямых, – это коника $C = l_1 \cup l_2$, где l_i – касательные к C_1 в точках A_i , $i = 1, 2$.

Задача 5. а) Найдите полюс прямой $3x - y + 6 = 0$ относительно вещественной аффинной коники $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 6y = 0$.

б) Найдите центр аффинной коники $2x^2 + 6xy + 5y^2 - y - 2 = 0$.