(1) Каждой булевой функции $f(x_1,\dots,x_n)$ сопоставим новую функцию, у которой значения функции f становятся коэффициентами многочлена Жегалкина:

$$F(f)(t_1,\dots,t_n)=\sum f(x_1,\dots,x_n)t_1^{x_1}\dots t_n^{x_n}.$$

(Здесь $t^x = \left\{\begin{array}{lll} t & \text{если} & x=1 \\ 1 & \text{если} & x=0 \end{array}\right.$) Доказать, что F есть линейная инволюция в пространстве булевых функций. Найти число инвариантных функций, т.е. таких, что $F(f)=f$. Мне не известно никакого хорошего описания таких функций.

(2) Определим линейную инволюцию S на пространстве булевых функций следующим образом: $(Sf)(x_1,\dots,x_n)=f(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)$. Докажите, что $(SF)^3=\mathrm{Id}$ (F — инволюция из задачи 1).

(3) Обосновать следующий способ вычисления многочлена Жегалкина булевой функции $f(x_1,\dots,x_n)$. В первый столбец матрицы X размером $2^n\times 2^n$ выписываются значения функции f при лексикографическом упорядочении переменных. Каждый следующий, $k+1$-ый столбец вычисляется по следующей формуле:

$$X_{i,k+1}=X_{i,k}+X_{i+1,k},\qquad i=1,\dots,2^{n-k}.$$

После заполнения всей таблицы коэффициенты многочлена Жегалкина в лексикографическом порядке считываются из первой строки.

(4) Докажите, что функция, сопряженная к монотонной, монотонна. Предложите какие-нибудь оценки сверху или снизу на число самосопряженных монотонных функций от n переменных.

(5) Предложите какие-нибудь оценки сверху или снизу на число монотонных функций от n переменных.

(6) Докажите, что булева функция монотонна тогда и только тогда, когда в ее сокращенной ДНФ нет отрицаний.

(7) Сопоставим каждому булеву вектору $a=(a_1,\dots,a_n)$ натуральное число $N_a=\sum a_k 2^{n-k}$ (так что вектор a является записью числа N_a в двоичной системе счисления). Докажите, что $a\le b$ (в смысле частичного порядка на множестве булевых векторов) равносильно тому, что число сочетаний $C_{N_b}^{N_a}$ нечетно.

(8) Докажите, что если треугольник Паскаля по модулю 2, состоящий из 2^n строк, разделить средними линиями на четыре равных треугольника, то два боковые треугольника получаются параллельным переносом из верхнего, а центральный треугольник заполнен нулями.
(9) Найдите минимальный и характеристический многочлены автоморфизма Фробениуса $\Phi : \mathbb{F}_{p^n} \to \mathbb{F}_{p^n}$ (напомним, что $\Phi(z) = z^p$), рассматриваемого как линейный оператор на n-мерном линейном пространстве над $\mathbb{F}_p$.
(10) Докажите, что при $a \neq 0$ многочлен $x^p - x - a$ неприводим над $\mathbb{F}_p$.
(11) Напишите производящий ряд для четырехвалентных графов и нарисуйте графы, отвечающие первым двум его членам.
(12) Докажите, что производящий ряд для всех графов есть экспонента ряда для связных графов.
(13) Докажите вершинную теорему Менгера.
(14) Докажите, что для любого связного графа Γ имеет место неравенство $\lambda(\Gamma) \geq \varkappa(\Gamma)$. (Напомним, что $\lambda(\Gamma)$ это наименьшее число ребер, удаление которых делает граф несвязным, а $\varkappa(\Gamma)$ это наименьшее число вершин, удаление которых делает граф либо несвязным, либо одновершинным.) Приведите пример графа, имеющего любые наперед заданные значения λ и $\varkappa$ ($\lambda \geq \varkappa$).
(15) Дан трехвалентный граф с $\lambda(\Gamma) = 3$, имеющий более двух вершин. Пусть u и v его две смежные вершины. Пусть вершине u смежны, кроме v, вершины u' и u'', а вершине v, соответственно, смежны, кроме вершины v, вершины v' и v''. Стиранием ребра uv называется следующая операция: мы удаляем вершины u и v и все инцидентные им ребра, после чего соединяем одним новым ребром вершины u' и u'', и другим новым ребром вершины v' и v''. Таким образом, снова получается трехвалентный граф Γ', число вершин которого уменьшилось на две. Докажите, что если $\lambda(\Gamma) = 3$, то в нем можно найти такое ребро uv, что после стирания этого ребра снова будет $\lambda(\Gamma') = 3$.
(16) Докажите формулу Коши-Бине (про определитель произведения двух неквадратных матриц).
(17) Приведите доказательство теоремы Холла и обоснование венгерского алгоритма, не опирающееся на теорему Форда-Фалкерсона.

(18) Докажите, что решетка целочисленных циклов и решетка целочисленных градиентов имеют равный дискриминант, совпадающий со сложностью графа (сложность = число остовных деревьев).
(19) Приведите какое-нибудь доказательство теоремы Кэли, отличное от рассказанного на лекциях.
(20) Дан граф Г. Докажите, что выпуклая оболочка в пространстве $H_1(\Gamma, \mathbb{R})$ множества простых циклов графа не содержит внутренних целых точек, отличных от нуля, а все целые точки на его границе это простые циклы. Докажите, что если $\lambda(\Gamma) \geq 3$, то грани этого многогранника находятся во взаимно-однозначном соответствии с ориентированными ребрами графа.
(21) Опишите явно многогранник из предыдущей задачи для
а) полного графа с четырьмя вершинами;
б) обобщенного тэта-графа с четырьмя ребрами (это две вершины, соединенные четырьмя ребрами).
(22) Пусть p — простое число, а n натуральное число. Докажите, что $n \mid \varphi(p^n - 1)$, где φ — функция Эйлера. (При чем здесь конечные поля?)

Письменные задания

(1) Сформировать индивидуальную случайную последовательность из 32 нулей и единиц. (Рекомендуемый способ формирования последовательности: взять первые 8 букв своей фамилии, добавив в случае краткой фамилии еще и имя, заменить каждую букву ее номером в алфавите по модулю 16 и записать получившиеся числа от 0 до 15 в виде четырехзначных двоичных чисел, получится как раз $4 \times 8 = 32$ знака.) Разбить полученную последовательность на две последовательности по 16 знаков и рассмотреть две булевы функции от четырех переменных, f_1 и f_2, множества значений которых при лексикографичкеском упорядочении переменных составляют две полученные последовательности. Для каждой из трех функций f_1, f_2, и $f_3 = f_1 \vee f_2$, найти сокращенную ДНФ и все тупиковые ДНФ, указав также ядровую ДНФ. Для одной из функций на выбор предложить оптимальную схему из функциональных элементов, реализующую эту функцию.
(2) Рассмотреть шесть булевых функций $\varphi_i(x; y; z)$, $i = 1, \ldots, 6$, полученных из функций f_1, f_2, f_3 предыдущей задачи по формулам $\varphi_{2n-k}(x; y; z) = f_n(k; x; y; z)$, $(n = 1, 2, 3;\ k = 0, 1)$,

$f_1 = f$. В наборе функций $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_6\}$ указать все минимальные полные подсистемы. Для одной из этих подсистем выразить все стандартные функции (т.е. $\bar{x}$, $x \vee y$, xy, $x + y$) через функции этой подсистемы и нарисовать соответствующие схемы из функциональных элементов.