

Электромагнитное излучение

Мы уже решали (в домашних листочках) задачи о том, как будет двигаться заряд во внешних полях \vec{E} и \vec{H} .

Сейчас займемся обратной задачей: как будет выглядеть электромагнитное поле, порождаемое зарядами, закон движения которых задан выше. Отметим, что решать задачу одновременного определения и траекторий зарядов, и конфигурации излучаемых ими полей \vec{E} и \vec{H} пока никто не научился.

Итак, мы решаем задачу:

$$(0) \quad \boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu,}$$

где токи $j^\mu(x)$ нам известны. Будем решать эту задачу сначала для 4-потенциала $A^\mu(x)$, а уже потом определим \vec{E} и \vec{H} . Для $A^\mu(x)$:

$$(1) \quad \boxed{\square A^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} j^\mu(x)}, \text{ при условии } \boxed{\partial_\mu A^\mu = 0} \quad (1')$$

Тут мы несколько ослабили условия ~~калибровочной~~ калибровки ($A^0_{(0)} = 0, \vec{\nabla} \vec{A}_{(0)} = 0$), наметив что $(0) \Rightarrow (1)$ и в случае $\partial_\mu A^\mu = 0$. Работаем в лоренцевой (негалилеевской) калибровке, т.к. нам удобно сохранять 4-векторность

вид уравнения (1). Задачу эту будем решать методом ⁽²⁾
функций Грина: ищем функцию $G(x)$ - обобщенную! -
 удовлетворяющую уравнению

$$\square G(x) = \delta^4(x) \quad (2)$$

$\delta(x^0) \delta^3(\vec{x})$

а затем строим $A^M(x)$ в виде

$$A^M(x) = \frac{4\pi}{c} \int_{\mathbb{R}^4} d^4y G(x-y) j^M(y) \quad (3)$$

↑ интеграл по пространству Минковского

Обратим внимание, что, помня возможность уравнения
 (1) / которое для (3) гарантируется формулой (2) /, надо еще
 будет проверить "калибровочное" условие Лоренца (1').

Решение уравнения (2) не единственно (оператор
 \square имеет нетривиальное ядро - например, плоские волны),
 поэтому на $G(x)$ будем накладывать граничные
 условия, исходя из физики задачи.

§ 1. Запоздавающая функция Грина $G_{ret}(x)$

Будем решать (2) с начальным условием

$$G_{ret}(x^0, \vec{x}) \Big|_{x^0 < 0} = 0 \quad (2')$$

так называемую, запоздавающую функцию Грина

Условие (2') означает, что ток $j^\mu(y)$ не влияет на вид 4-потенциала A^μ (и полей \vec{E} и \vec{H}) в момент времени $x^0 < y^0$ (см. формулу (3)). С физической точки зрения мы ищем решения задачи (1), удовлетворяющие принципу причинности.

Уравнение (2) стандартно решается с использованием прямого и обратного преобразования Фурье:

$$(4a) \quad G(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i p \cdot x} \tilde{G}(p)$$

$$(4b) \quad \tilde{G}(p) = \int d^4 y \cdot e^{-i p \cdot y} G(y)$$

тут $p \cdot x \equiv p_\mu x^\mu$

и представление для δ -функции:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int dp e^{\pm i p x}$$

знак не важен

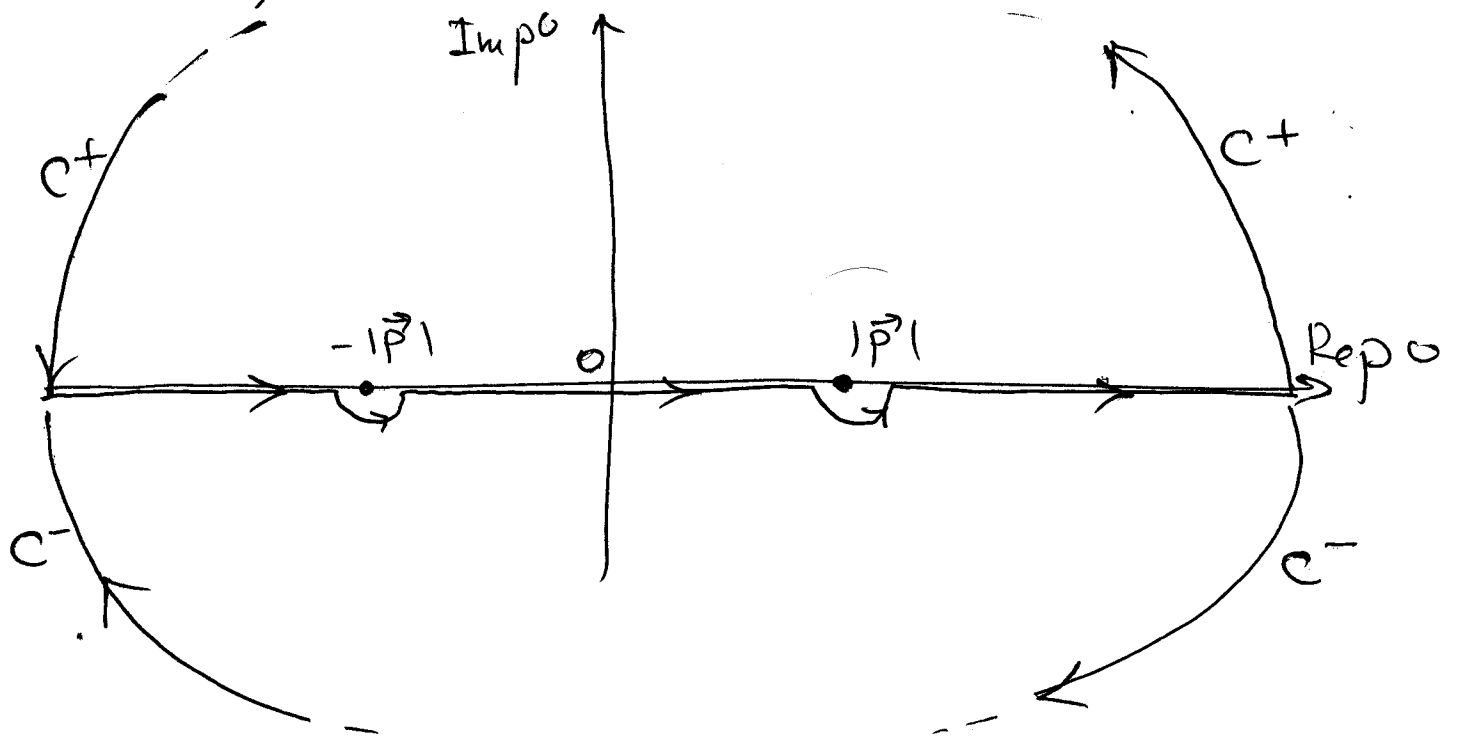
$$(5) \quad \delta^4(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{i p \cdot x}$$

Формально подставляя (4a) и (5) в (2) получаем выражение для \tilde{G} :

$$(6) \quad \tilde{G}(p) = -\frac{1}{p_\mu p^\mu} = -\frac{1}{(p^0)^2 - \vec{p}^2}$$

Подстановка $\tilde{G}(p)$ назад в (4a) для вычисления $G(x)$ требует аккуратности, так как \tilde{G} имеет особенности

при $\rho^0 = \pm |\vec{\rho}|$. Выбор правила обхода контуров при интегрировании по ρ^0 (переходим в комплексную плоскость по ρ^0 и применим ГФКП) диктуется граничным условием (2'). Мы выбираем контур C_+/C_- для интегрирования по ρ^0 при $x^0 > 0 / x^0 < 0$ (см. Рис.).



При этом оказывается:

$$G_{ret} \Big|_{x^0 < 0} = 0$$

т.е. мы удовлетворим граничным условиям (2'), обходя полюса $\pm |\vec{\rho}|$ снаружи.

, т.к. внутри контура нет полюсов, а интеграл по ∞ -ой полуокружности убывает в факторе

$$e^{i\rho^0 x^0} = e^{-\underbrace{\text{Im} \rho^0}_{> 0} x^0 + i \text{Re} \rho^0 x^0}$$

\downarrow
 $(+\infty)$
 при $x^0 < 0$ $\text{Im} \rho^0 < 0$

Возьмем G_{ret} при $x^0 > 0$. Замыкаем контур C^+ в верхней полу плоскости связано с тем, что

грань $e^{-\text{Im} p^0 \cdot x^0}$ при $x^0 > 0$ убывает интеграл по верхней полушаре. Итак: (5)

$$G_{\text{ret}}(x) \Big|_{x^0 > 0} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}\vec{x}} \int_{c^+} \frac{dp^0}{2\pi} \tilde{G}(p) \quad (6)$$

$$- \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}\vec{x}} \int_{c^+} \frac{dp^0}{2\pi} \frac{e^{ip^0 x^0}}{2|\vec{p}|} \left(\frac{1}{p^0 - |\vec{p}|} - \frac{1}{p^0 + |\vec{p}|} \right) =$$

берем интеграл
волегами

$$- \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\vec{p}\vec{x}}}{2|\vec{p}|} \frac{2\pi i}{2\pi} (e^{i|\vec{p}|x^0} - e^{-i|\vec{p}|x^0}) =$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\vec{p}\vec{x}}}{|\vec{p}|} \sin(|\vec{p}|x^0)$$

переходим в сферическую систему координат,
где ось $Oz \uparrow \vec{x}$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^\infty p^2 dp \cdot \frac{e^{-ip \cos\theta \cdot |\vec{x}|}}{p} \sin(p x^0)$$

замена $z = \cos\theta$

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty p \sin(p x^0) dp \int_{-1}^1 e^{-ip|\vec{x}| \cdot z} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 |\vec{x}|} \int_0^\infty \sin(p x^0) \sin(p |\vec{x}|) dp$$

используем четность подынтегральной функции: $\int_0^\infty \rightarrow \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty}$

$$= \frac{1}{4\pi^2 |\vec{x}|} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \sin(p x^0) \sin(p |\vec{x}|) \quad \underline{\text{заменяем } \sin \rightarrow \exp}$$

$$= \frac{1}{16\pi^2 |\vec{x}|} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left(e^{ip(x^0 - |\vec{x}|)} + e^{-ip(x^0 - |\vec{x}|)} - e^{ip(x^0 + |\vec{x}|)} - e^{-ip(x^0 + |\vec{x}|)} \right)$$

$$= \frac{1}{8\pi |\vec{x}|} \left\{ \delta(x^0 - |\vec{x}|) + \delta(x^0 - |\vec{x}|) - \delta(x^0 + |\vec{x}|) - \delta(x^0 + |\vec{x}|) \right\}$$

///
0, т.к. $x^0 > 0$ и $|\vec{x}| \geq 0$

Окончательно

$$(7) \quad \boxed{G_{\text{ret}}(x) = \frac{1}{4\pi |\vec{x}|} \delta(x^0 - |\vec{x}|)}$$

Эта формула автоматически подразумевает $G_{\text{ret}} \Big|_{x^0 < 0} = 0$,

Формулу (7) можно переписать в лоренц-ковариантном виде, ~~с учётом~~ с учётом

$$\delta(x_\mu x^\mu) = \delta(x^0{}^2 - \vec{x}^2) = \frac{1}{2|\vec{x}|} \left\{ \delta(x^0 - |\vec{x}|) + \delta(x^0 + |\vec{x}|) \right\}$$

с помощью (7) переписать как:

$$(7') \quad \boxed{G_{\text{ret}}(x) = \frac{1}{2\pi} \theta(x^0) \delta(x^\mu x_\mu)},$$

здесь $\theta(x^0) = \begin{cases} 1 & x^0 > 0 \\ 0 & x^0 < 0 \end{cases}$ — функция Хевисайда.

§2 Потенциалы Лиенара-Вихерта

Вернемся к волновому решению уравнения (1)

Мы получили выражение (7) → (3):

$$(8) \quad A^\mu(x) = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^4} d^4y \frac{\delta(x^0 - y^0 - |\vec{x} - \vec{y}|)}{|\vec{x} - \vec{y}|} j^\mu(y)$$

Проверим для него условие $\partial_\mu A^\mu = 0$

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{4\pi}{c} \int_{\mathbb{R}^4} d^4y \partial_\mu (\text{no } x^\mu) G_{\text{ret}}(x-y) j^\mu(y) =$$

$$= -\frac{4\pi}{c} \int_{\mathbb{R}^4} d^4y \partial_\mu (\text{no } y^\mu) G_{\text{ret}}(x-y) j^\mu(y) =$$

$$= \frac{4\pi}{c} \int_{\mathbb{R}^4} d^4y \partial_\mu (\text{no } y^\mu) (G_{\text{ret}}(x-y) j^\mu(y)) + \frac{4\pi}{c} \int_{\mathbb{R}^4} d^4y G_{\text{ret}}(x-y) \partial_\mu j^\mu(y)$$

«поток» вектора $G_{\text{ret}}(x-y) j^\mu(y)$ через «границу» \mathbb{R}^4 , т.е.

в силу закона сохранения заряда.

$$\left[\int d^3y G_{\text{ret}}(x-y) j^0(y) \right] \Big|_{t_1 \rightarrow -\infty}^{t_2 \rightarrow +\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} dt x^0 \int_{\partial \mathbb{R}^3} (d^2 \vec{\sigma}, \vec{j}(y)) G_{\text{ret}}(x-y)$$

0, т.к. считаем, что заряды летают в ограниченной области \mathbb{R}^3 :

$$\vec{j} |_{\partial \mathbb{R}^3} = 0$$

Так как ~~...~~ $G_{\text{ret}} \sim \delta(x^0 - y^0 - |\vec{x} - \vec{y}|)$ локализована в точке $y^0 = x^0 - |\vec{x} - \vec{y}|$.
 При заданных x^0 и \vec{x} и при $y^0 \rightarrow \pm\infty$, G_{ret} локализована в точке с $\vec{y} \rightarrow \infty$,
 А $j^0(y) \neq 0$ в ограниченной области $|\vec{y}| < R$

⇒ этот вклад = 0

Итак, $\partial_\mu A^\mu = 0$ для решения (8), если заряды (8) летают в ограниченной области \mathbb{R}^3 .

Возьмем A^μ явно для точечного заряда

$$\left\{ \begin{aligned} \rho(\tau, \vec{y}) &= e \delta^3(\vec{y} - \vec{r}_e(\tau)) \\ \vec{j}(\tau, \vec{y}) &= \vec{v}_e(\tau) \rho(\tau, \vec{y}), \\ \underline{j^\mu(y)} &= \underline{j^\mu(\tau, \vec{y})} = \{c\rho, \vec{j}\} \end{aligned} \right.$$

где $\vec{r}_e(\tau)$ — радиус-вектор заряда e , $\vec{v}_e(\tau) = \frac{d\vec{r}_e}{d\tau}$ — его скорость.

Возьмем A^0 :

$$A^0(t, \vec{x}) = \frac{1}{c} \int \underbrace{cd\tau}_{dy^0} \int d^3y \frac{\delta(ct - c\tau - |\vec{x} - \vec{y}|)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \overbrace{ce \delta^3(\vec{y} - \vec{r}_e(\tau))}^{c\rho}$$

вычислим
интеграл по d^3y

$$\boxed{e \int d\tau \frac{c \delta(ct - c\tau - |\vec{x} - \vec{r}_e(\tau)|)}{|\vec{x} - \vec{r}_e(\tau)|}} \quad (8')$$

Используем:

$$\left\{ \begin{aligned} |a| \delta(ax) &= \delta(x) \\ \delta(f(x)) &= \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i), \text{ где } x_i: f(x_i) = 0 \end{aligned} \right.$$

Для вычисления интеграла по $d\tau$ нам потребуется

$$\left| \frac{d}{d\tau} \left(t - \tau - \frac{|\vec{x} - \vec{r}_e(\tau)|}{c} \right) \right| = 1 - \frac{(\vec{x} - \vec{r}_e(\tau), \vec{v}_e(\tau)/c)}{|\vec{x} - \vec{r}_e(\tau)|} \geq 0.$$

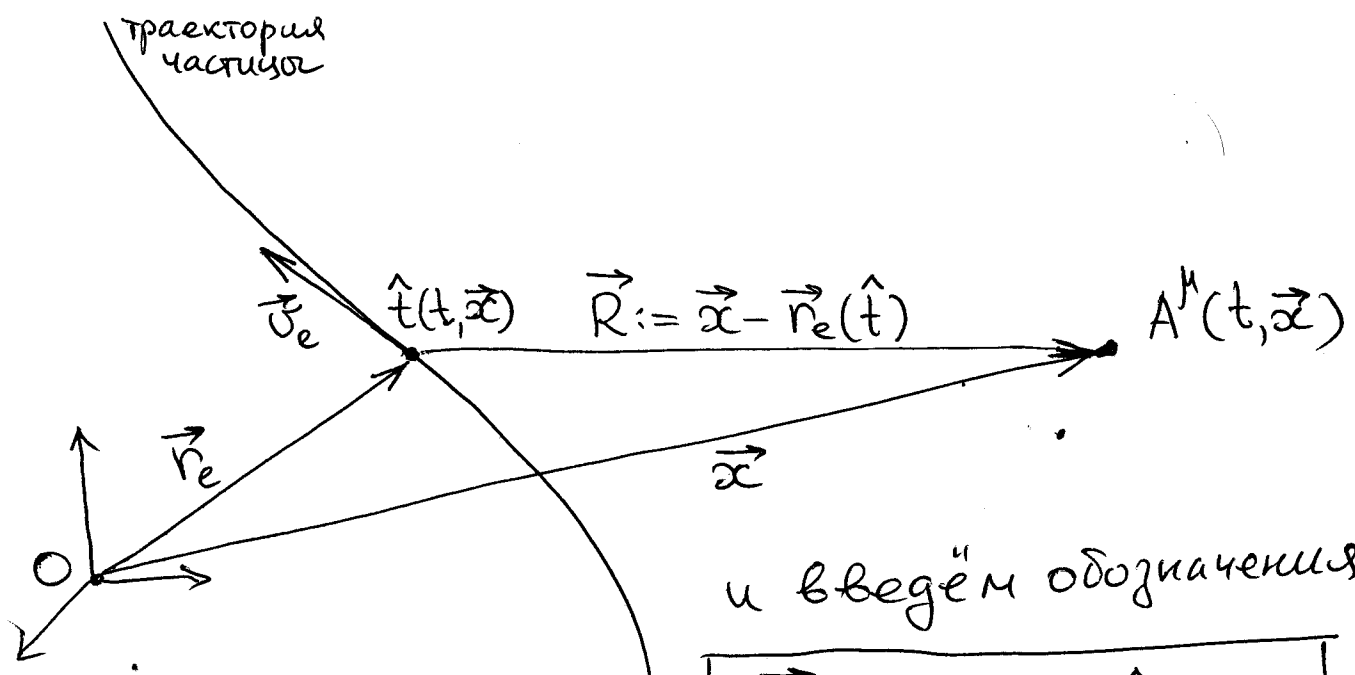
Результат вычисления:

$$\boxed{A^0(t, \vec{x}) = \frac{e}{|\vec{x} - \vec{r}_e(\hat{t})| - (\vec{x} - \vec{r}_e(\hat{t}), \vec{v}_e(\hat{t})/c)}, \text{ где}}$$

\hat{t} - решение уравнения

$$\hat{t} := t - \frac{|\vec{x} - \vec{r}_e(\hat{t})|}{c} \quad (9)$$

\hat{t} - значение t , при котором аргумент δ -функции обращается в нуль. Чтобы разобраться в смысле поправочных формул, нарисуем картинку:



и введём обозначения:

$$\begin{aligned} \vec{R} &:= \vec{x} - \vec{r}_e(\hat{t}) \\ \vec{n} &:= \vec{R} / |\vec{R}| \\ \alpha &:= 1 - \left(\vec{n}, \frac{\vec{v}_e(\hat{t})}{c} \right) \end{aligned} \quad (9')$$

Тогда выражения для 4-потенциала $A^M(\vec{x}, t)$, создаваемого движущимся зарядом e по траектории $\vec{r}_e(t)$ имеют вид:

$$A^0(\vec{x}, t) = \frac{e}{\alpha R}, \quad \vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{e}{\alpha R} \cdot \frac{\vec{v}_e}{c} \quad (10)$$

(\vec{A} вычисляется аналогично A^0)

Реш: здесь в правой части все величины - функции от времени \hat{t} .

Формулы (10) называются формулами для потенциалов Лиенара - Вихерта. (10)

Замечаем, значение потенциалов A^M в момент времени t в точке \vec{x} зависит от поведения заряда e в момент времени $\hat{t} < t$, причем разность времен $t - \hat{t} = \frac{|\vec{x} - \vec{r}_e(\hat{t})|}{c}$ (см (9)) в точности равна времени, за которое свет долетает из точки ~~туда~~ $\vec{r}_e(\hat{t})$, где находился заряд в точку \vec{x} , где формируется потенциал A^M . Формулы (10) еще называются формулами запаздывающих потенциалов: $(t - \hat{t})$ - время запаздывания.

Из потенциала A^M можно вычислить физические поля \vec{E} и \vec{H} .

Приведем для них ответы, введя дополнительные обозначения:

$$\boxed{R = |\vec{R}|, \quad \vec{a}_e = \dot{\vec{v}}_e = \ddot{\vec{r}}_e} \quad (9'')$$

$$\vec{E}(\vec{a}, t) = \left[\frac{e(1 - \frac{v_e^2}{c^2})}{\alpha^3 R^2} (\vec{n} - \frac{\vec{v}_e}{c}) + \frac{e}{c^2 \alpha^3 R} \vec{n} \times ((\vec{n} - \frac{\vec{v}_e}{c}) \times \vec{a}_e) \right] \Big|_{\hat{t}} \quad (11a)$$

"Статический" вклад
 При $\vec{v}_e = 0$ даёт закон Кулона:
 $\vec{E} = \frac{e \vec{n}}{R^2}$
 При $\vec{v}_e = \text{const}$ порождает магнитное поле постоянного тока.

Излучение. Этот вклад \hat{t} доминирует при $R \rightarrow \infty$ (пропорционален $1/R$).
 Излучение присутствует только если заряд ускоряется: $\vec{a}_e \neq 0$.

$$\vec{H}(\vec{a}, t) = \vec{n} \times \vec{E} \Big|_{\hat{t}} \quad (11b)$$

Можно выразить наоборот \vec{E} через \vec{H} :

$$\vec{E} = \left[\frac{e(1 - \frac{v_e^2}{c^2})}{\alpha^2 R^2} \vec{n} + \vec{H} \times \vec{n} \right] \Big|_{\hat{t}} \quad (11b)$$

Во всех формулах (11) значок $[...] \Big|_{\hat{t}}$ означает вычисление выражения $[...]$ в момент времени \hat{t} (9).

Формулы (11) — точные! Никаких приближений не делаем.

Обратим внимание, заряд излучает как \vec{E} , \vec{H} , такие что $\vec{H} \perp \vec{n}$, $\vec{H} \perp \vec{E}$, но, вообще говоря, $\vec{E} \nparallel \vec{n}$
 (направление излучения) "статическая" часть \vec{E} может быть $\nparallel \vec{n}$ а излучательная $\perp \vec{n}$.

§3 Электрический диполь и его излучение.

(12)

Мы получили точные формулы (9, 10, 11) для электромагнитных полей, создаваемых точечными зарядами. Эти формулы сложны. Обсудим интересные частные случаи.

Электростатика:

Рассмотрим покоящийся заряд e : $\vec{v}_e = 0$. ($\Rightarrow \alpha = 1$)

Имеем:

$$(10) \Rightarrow A^0(\vec{x}, t) = \frac{e}{R}, \quad \vec{A} = 0$$

$$(11) \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{e\vec{n}}{R^2} = \frac{e\vec{R}}{R^3}}, \quad \vec{H} = 0 \quad (12)$$

Здесь $\vec{R} = (\vec{x} - \vec{r}_e) = \text{const}$, поэтому потенциал A^0 и поле \vec{E} не зависят от времени (выбор момента t не существен).

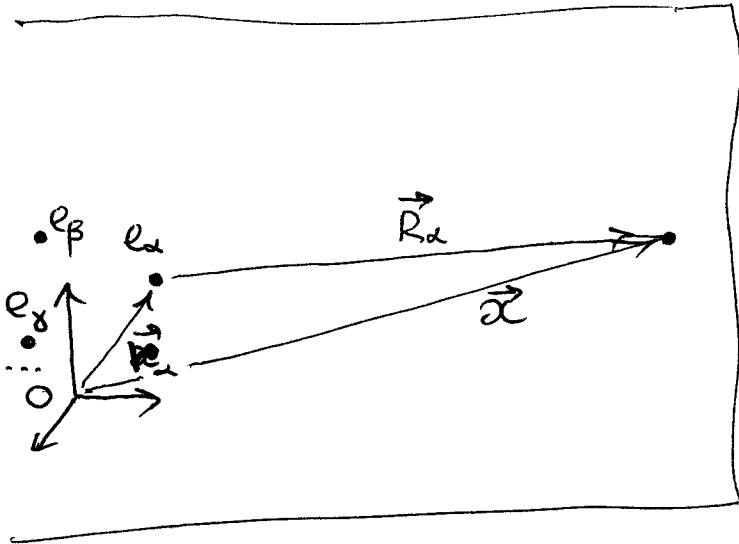
Формула (12) — известный закон Кулона.

Рассмотрим теперь систему из нескольких зарядов e_i . Создаваемые ими поля A^0 и \vec{E} складываются (свойство решений линейных уравнений). Предположим, что система в целом электрически нейтральна

$$\boxed{\sum_{\alpha} e_{\alpha} = 0},$$

тогда создаваемые зарядами кулоновские поля (12)

почти компенсируются (мы полагаем, что заряды (13) расположены в малой области пространства, а мы следим за создаваемым ими полем на относительно большом расстоянии). Изучим в первом приближении, как выглядит нескомпенсированная часть поля:



Итак: $|\vec{R}_\alpha| \ll |\vec{x}| \quad \forall \alpha$.

$$\vec{R}_\alpha = \vec{x} - \vec{r}_\alpha$$

$$|\vec{R}_\alpha| = |\vec{x}| \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{r}_\alpha)}{|\vec{x}|} \right) + o\left(\frac{|\vec{r}_\alpha|}{|\vec{x}|}\right)$$

где $|\vec{n}| := \vec{x}/|\vec{x}|$

Откуда:

$$A^0(\vec{x}) = \sum_\alpha \frac{e_\alpha}{R_\alpha} = \frac{1}{|\vec{x}|} \sum_\alpha e_\alpha \left(1 + \frac{(\vec{n}, \vec{r}_\alpha)}{|\vec{x}|} \right) + o(\dots)$$

(13a) $A^0(\vec{x}) \approx \frac{(\vec{n}, \vec{d})}{|\vec{x}|^2}$, где $\vec{d} = \sum_\alpha e_\alpha \vec{r}_\alpha$ — электрический дипольный момент системы зарядов

Аналогично получим

$$\vec{E} = \sum_\alpha \frac{e_\alpha \vec{R}_\alpha}{R_\alpha^3} = - \frac{\sum e_\alpha \vec{r}_\alpha}{|\vec{x}|^3} + \vec{x} \sum_\alpha \frac{e_\alpha}{R_\alpha^3} \Rightarrow$$

(13b) $\vec{E}(\vec{x}) \approx \frac{-\vec{d} + 3\vec{n}(\vec{n}, \vec{d})}{|\vec{x}|^3}$

Следовательно, электрическое поле \vec{E} , создаваемое

в целом нейтральной системой статических зарядов, в отличие от Кулоновского (12) нейтрально (явно выделено направление \vec{r}) и убывает с расстоянием как $\frac{1}{|\vec{x}|^3}$ (у Кулона $\frac{1}{|\vec{x}|^2}$).

Упражнение: Определите электрическое и магнитное поле, создаваемые постоянным током зарядов. (Заряды текут по проволоке с постоянной скоростью \vec{v} , линейная плотность их распределения вдоль проволоки постоянна: $dr = \rho dx$)

Рассмотрим теперь систему ускоренных зарядов в целом электрически нейтральную (характерный пример - антенна). В предположении $|\vec{v}_2| \ll |\vec{x}|$ определим примерно, какие поля \vec{E} и \vec{H} пугаются.

Сначала определим примерно сферические моменты времени t и \hat{t} (9):

$$\hat{t} = t - \frac{|\vec{x}|}{c} \left(1 - \frac{(\vec{n} \vec{v}_2)}{|\vec{x}|} \right) + O\left(\frac{|\vec{v}_2|^2}{|\vec{x}|}\right)$$

каждого заряда e_2 . Чтобы иметь возможность задать общее время $\hat{t} \approx t - \frac{|\vec{x}|}{c}$ для всех зарядов

системы, придется наложить еще "условие"

$$\boxed{\tau \gg \frac{|\vec{v}_2|}{c} \geq \frac{(\vec{n} \vec{v}_2)}{c}}$$

здесь τ - характерное время протекания процес-

сов в системе — период, за который значительно (15) меняются поля \vec{E} и \vec{H} , например, период обращения зарядов (если их движение периодично).

Переходим к условию в виде

$$|\vec{v}_\alpha| \leq \frac{|\vec{r}_\alpha|}{T} \ll c,$$

мы можем сказать, что это условие выполнено, если заряд движется с переменчивыми скоростью.

Итак, согласившись, что при $v_\alpha/c \ll 1$ для всех зарядов системы время \hat{t} примерно одинаково: $\hat{t} \approx t - \frac{|\vec{x}|}{c}$, посчитаем циркуляционную

компоненту полей:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{цир}} &\approx \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{c^2 R_{\alpha}^3} [\vec{n}_{\alpha} \times ((\vec{n}_{\alpha} - \frac{\vec{v}_{\alpha}}{c}) \times \vec{a}_{\alpha})] \approx \\ &\approx \frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \sum_{\alpha} e_{\alpha} \vec{a}_{\alpha})}{c^2 |\vec{x}|} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E}_{\text{цир}} &\approx \frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \ddot{\vec{d}})}{c^2 |\vec{x}|} \\ \vec{H}_{\text{цир}} &\approx \vec{n} \times \vec{E}_{\text{цир}} = \frac{\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}}{c^2 |\vec{x}|} \end{aligned}} \quad (14)$$

Тут в правой части все функции вычисляются в момент времени $\hat{t} = t - \frac{|\vec{x}|}{c}$.

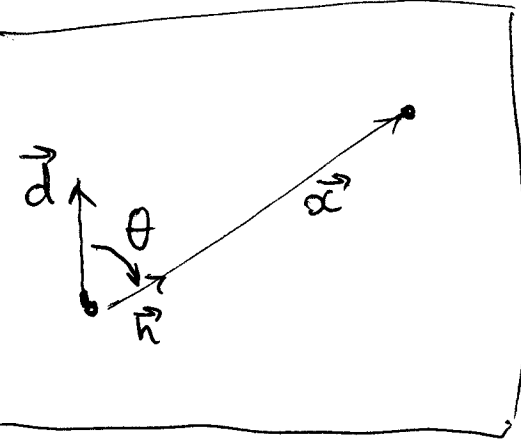
Замечаем, что циркуляционная компонента полей

\vec{E} и \vec{H} убывают как $\frac{1}{|\vec{x}|}$ с расстоянием, а значит они доминируют над статическими компонентами на больших расстояниях $|\vec{x}|$. (16)

Замечаем, что $\vec{E}_{\text{изл}} \perp \vec{H}_{\text{изл}}$, и оба они \perp направлению излучения \vec{n} — излучаемая волна поперечна,

причем

$$|\vec{E}_{\text{изл}}| = |\vec{H}_{\text{изл}}| = \frac{|\ddot{\vec{d}}| \sin \theta}{c^2 |\vec{x}|} \quad (\text{см. Рис.})$$



Вектор плотности потока излучения (вектор Пойнтинга): $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E}_{\text{изл}} \times \vec{H}_{\text{изл}}$.

$\vec{S} \uparrow \uparrow \vec{n}$, причем

$$|\vec{S}| = \frac{|\ddot{\vec{d}}|^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3 |\vec{x}|^2}$$

Интегрируя по сфере ($d\Omega = \vec{n} \sin \theta d\varphi d\theta$ и $\frac{1}{r^2} \cdot |\vec{x}|^2$) мы получаем величину излучаемой энергии системой зарядов в единицу времени — интенсивность

излучения:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \cdot |\vec{S}| = \frac{2|\ddot{\vec{d}}|^2}{3c^3}$$

Если заряды колеблются гармонически: $\vec{d} = \vec{d}_0 \sin \omega t$,

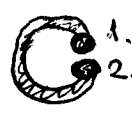
то
$$I = \frac{2 |d_0|^2 \omega^4}{3c^3} \sin^2 \omega t,$$

поэтому среднее значение интенсивности излучения за период $T = 2\pi/\omega$:

$$\bar{I} = \frac{|d_0|^2}{3c^3} \cdot \omega^4$$

(15)

Итак, излучение \sim 4-ой степени частоты колебаний. Значит, чтобы пронаблюдать волны, надо запустить колебания большой частоты. Это догадался сделать Генрих Герц в серии экспериментов (1887-89 г.г.) через \sim 20 лет после создания э.-м. теории Джеймсом Максвеллом (1864-68 г.г.)

Герц построил излучатель: 2 заряженных шара соединены до возникновения между ними электрического пробоя. В момент пробоя возникают колебания заряда высокой частоты. Получившиеся волны имеют резонатором: незамкнутым проводящим контуром вида . Электромагнитные волны от пробоя наводят ~~тоже~~ переменный ток в контуре. Разводя концы 1, 2 резонатора можно получать в нем резонанс колебаний, что приводит к появлению пробоя между концами 1 и 2 — искра. Ее он и регистрировал.

Формула (15) в конце концов привела к краху классической теории в объяснении явлений микромира. Если полагать, что атом — это классическая система электрон + ядро, взаимодействующих с помощью кулоновской силы, то электрон должен очень быстро (с большой частотой ω) вращаться вокруг ядра, а значит он должен излучать значительную энергию. Классический расчёт показывает, что он должен потерять всю свою энергию за $\sim 10^{-9}$ сек. и рухнуть на ядро \Rightarrow конец жизни.

Воскресить физику удаётся только с помощью полной пересмотра физической модели микромира — с созданием квантовой механики.