

Семинар 13

Задача 1. Найдите число элементов стабилизатора H точки в группе $PGL(2, \mathbb{F}_7)$. (Указание. Дайте аффинное истолкование группы H .)

Задача 2. Найдите уравнение вещественной аффинной коники, заданной параметрическими уравнениями

$$x(t) = \frac{t^2 + 1}{t + 2}, \quad y(t) = \frac{t^2 + t}{t + 2}.$$

Задача 3. Найдите такую рациональную параметризацию окружности с уравнением

$$x^2 + y^2 = 5,$$

что для всех рациональных значений параметра t числа $x(t)$ и $y(t)$ рациональны.

Задача 4. Найдите общий вид проективного преобразования вещественной проективной плоскости, отображающего окружность $\omega = \{x^2 + y^2 = 1\}$ в гиперболу $C = \{x^2 - y^2 = 1\}$, а точки $(0, 1)$ и $(0, -1)$ окружности ω в несобственные точки гиперболы C , лежащие на асимптотах $\{x - y = 0\}$ и $\{x + y = 0\}$ соответственно. (Уравнения указаны в аффинной карте $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$.)

Задача 5. Пусть Q – невырожденная непустая вещественная квадрика в $\mathbb{P}^3$, заданная уравнением $\Phi(x) = 0$, где $\Phi(x) = a_0x_0^2 + a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 = 0$, $a_i \in \{-1, 1\}$, $i = 0, 1, 2, 3$.

(а) Укажите возможные аффинные типы квадрики $Q \cap \mathbb{A}^3$, где $\mathbb{A}^3 = \{x_0 \neq 0\}$.

(б) Решите эту же задачу для $\Phi(x) = x_0x_1 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2$, $a_2, a_3 \in \{-1, 1\}$.