Динамические системы (осень, 2015)
Программа экзамена

(1) Линейные уравнения первого порядка. Вариация постоянной. Оператор монодромии. Существование и единственность периодического решения.

(2) Фазовое пространство. Расширенное фазовое пространство. Интегральные кривые и фазовые кривые. Решение уравнения $\dot{x} = b(x)$, где $x \in \mathbb{R}$.

(3) Взаимосвязь фазовых кривых системы $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$ и интегральных кривых уравнения $y' = Q(x, y)/P(x, y)$. Метод разделения переменных.

(4) Поле направлений на $\mathbb{R}^2$ и его задание с помощью дифференциальной 1-формы. Уравнение в дифференциалах. Лемма Пуанкаре. Необходимое и достаточное условие локального существования интегральной двумерной поверхности для данного поля плоскостей в $\mathbb{R}^3$.

(5) Изоморфизм пространства гладких векторных полей на области $D \subset \mathbb{R}^d$ и пространства операторов дифференцирования первого порядка на $C^\infty(D)$. Коммутатор векторных полей и его свойства. Достаточное условие интегрируемости в квадратурах.

(6) Замена координат в фазовом пространстве. Перенос векторного поля при диффеоморфизме. Фазовый портрет системы $\dot{x} = Ax$, где $x \in \mathbb{R}^2$ и A – постоянная матрица 2×2. Классификация особых точек.

(7) Замена координат в расширенном фазовом пространстве. Симметрии поля направлений. Однородные уравнения.

(8) Существование и единственность решения задачи Коши.

(9) Продолжаемость решения. Априорная оценка – достаточное условие продолжаемости решения.

(10) Неравенство Гронуолла. Гладкая зависимость решения от параметра. Уравнение в вариациях.

(11) Диффеоморфизм является симметрией векторного поля тогда и только тогда, когда он коммутирует с фазовым потоком. Группа симметрий поля $x\partial_x + y\partial_y$.

(12) Фазовый поток, порожденный векторным полем c, является однопараметрической группой симметрий векторного поля b тогда и только тогда, когда $[b, c] = 0$.

(13) Теорема Лиувилля. Теорема Пуанкаре о возвращении.

(14) Выпрямление векторного поля в окрестности неособой точки.

(15) Уравнения, содержащие производные высокого порядка. Канонический изоморфизм.

(16) Линейные однородные системы $\dot{x} = A(t)x$: линейность пространства решений и его размерность, фундаментальная система решений, определитель Вронского, теорема Лиувилля–Остроградского.

(17) Линейные неоднородные системы $\dot{x} = A(t)x + F(t)$: структура пространства решений, метод вариации постоянных.

(18) Линейные однородные системы с постоянной матрицей. Экспонента матрицы и ее свойства.

(19) Линейные однородные уравнения n-го порядка с непостоянными коэффициентами: линейность пространства решений и его размерность, фундаментальная система решений, определитель Вронского, теорема Лиувилля–Остроградского.
(20) Линейные неоднородные уравнения n-го порядка с непостоянными коэффициентами: структура пространства решений, метод вариации постоянных.
(21) Линейные однородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами: вид фундаментальной системы решений.
(22) Линейные неоднородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами: квазимногочлен в правой части, свертка фундаментального решения с правой частью.
(23) Устойчивость и асимптотическая устойчивость по Ляпунову.