Листок 2

Задача 1. Пусть $b(x) \in C([-\delta, \delta])$, $b(x) \neq 0$ при $x \neq 0$ и $b(0) = 0$.

1.1. Докажите, что если несобственные интегралы

$$\int_{-\delta}^{0} \frac{dx}{b(x)} \quad \text{и} \quad \int_{0}^{\delta} \frac{dx}{b(x)}$$

расходятся, то задача Коши $\dot{x} = b(x)$, $x(0) = 0$, имеет единственное решение $x(t) \equiv 0$.

1.2. Докажите, что сходимость хотя бы одного из приведенных выше интегралов влечет существование отличного от нуля решения задачи Коши.

1.3. Докажите, что если задача Коши $\dot{x} = b(x)$, $x(0) = 0$, имеет два решения, то она имеет бесконечно много решений.

Задача 2. Пусть функция $b(x, y)$ квазиоднородна степени n с весами (α, β), то есть

$$b(e^{\alpha\tau}x, e^{\beta\tau}y) = e^{n\tau}b(x, y).$$

2.1. Докажите, что поле направлений уравнения $y' = b(x, y)$ на области

$$\{(x, y)\colon\ x > 0, y > 0\}$$

инвариантно относительно группы преобразований $g^\tau(x, y) = (e^{\alpha\tau}x, e^{\alpha\tau}y)$ тогда и только тогда, когда $n = \beta - \alpha$.

2.2. Пусть $n = \beta - \alpha$. Найдите замену переменных, которая преобразует уравнение $y' = b(x, y)$ в уравнение с разделяющимися переменными.

2.3. В каких координатах разделяются переменные в уравнении $y' = xy^2 + x^3y^3$?

Задача 3. Какие из следующих векторных полей

$$(2\sin x)\partial_x, \quad (\sin^2 x)\partial_x, \quad (\sin 2x)\partial_x$$

на прямой $\mathbb{R}$ можно перевести друг в друга диффеоморфизмом?

Задача 4. Найдите все гладкие векторные поля на плоскости, которые коммутируют с векторным полем

(a) $\frac{\partial}{\partial x}$, (b) $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$.

Задача 5. Докажите, что если $P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, то функция u постоянна вдоль фазовых кривых системы $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$. Используя это наблюдение, найдите все гладкие функции u такие, что

(a) $2\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, (b) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ (c) $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.