

**Контрольная работа по геометрии,  
2 модуль 2015-16, 1 курс бакалавриата, 18.12.2015  
Вариант 1**

**Задача 1.** В вещественном проективном пространстве  $\mathbb{P}^3$  найдите координаты точек пересечения квадрики  $Q$ , заданной уравнением  $x_0^2 + x_1^2 - 2x_2x_3 = 0$ , с проективной прямой, проходящей через точки  $A = (0 : 1 : 0 : 1)$  и  $B = (1 : 0 : 0 : -1)$ .

**Задача 2.** Сколько имеется невырожденных коник на вещественной проективной плоскости, проходящих через точки  $A = (0 : 1 : -1)$ ,  $B = (0 : 1 : 1)$  и точку  $C = (1 : 1 : 1)$ , для которых прямая  $AB$  является полярной точки  $D = (1 : 0 : 0)$ ? Найдите уравнения таких коник.

**Задача 3.** Укажите аффинный тип вещественной аффинной квадрики  $Q$ , заданной в  $\mathbb{A}^3$  уравнением  $x^2 - z^2 + 2xy - 2yz + 4x + 2y - 2z + 4 = 0$ . Укажите проективный тип проективного замыкания  $\overline{Q}$  квадрики  $Q$  при вложении  $\mathbb{A}^3$  в  $\mathbb{P}^3$  по формуле  $(x, y, z) \mapsto (1 : x : y : z)$ .

**Задача 4.** Пусть  $\mathbb{P}^2$  – проективная плоскость над полем  $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ,  $(x_0 : x_1 : x_2)$  – проективные координаты в  $\mathbb{P}^2$ ,  $l = \{x_0 = 0\}$  – проективная прямая в  $\mathbb{P}^2$ , и  $A = (0 : 0 : 1)$  – точка на  $l$ . (Такая пара  $(A, l)$ , где  $A \in l$ , называется флагом в  $\mathbb{P}^2$ .) В группе  $G = PGL(3, \mathbb{F}_5)$  проективных преобразований плоскости рассмотрим подгруппу  $H$ , являющуюся стабилизатором флага  $(A, l)$ , то есть подгруппу преобразований, сохраняющих флаг  $(A, l)$ :  $H := \{g \in G \mid g(A) = A, g(l) = l\}$ . Найдите порядок (число элементов) подгруппы  $H$ .

**Задача 5.** Пусть коника  $Y$  на вещественной проективной плоскости проходит через точки  $A = (1 : 0 : 0)$ ,  $B = (1 : 1 : 1)$ ,  $C = (1 : 0 : 2)$  и касается прямой  $x_0 = 0$  в точке  $D = (0 : 1 : 0)$ . Найдите двойное отношение точек  $A, B, C, D$  на конике  $Y$ .

**Контрольная работа по геометрии,  
2 модуль 2015-16, 1 курс бакалавриата, 18.12.2015  
Вариант 2**

**Задача 1.** В вещественном проективном пространстве  $\mathbb{P}^3$  найдите координаты точек пересечения квадрики  $Q$ , заданной уравнением  $x_0x_1 - 2x_2x_3 = 0$ , с проективной прямой, проходящей через точки  $A = (1 : 1 : 0 : 0)$  и  $B = (0 : 0 : 1 : 1)$ .

**Задача 2.** Сколько имеется невырожденных коник на вещественной проективной плоскости, проходящих через точки  $A = (0 : 1 : 0)$ ,  $B = (0 : 1 : 1)$  и точку  $C = (1 : 1 : -1)$ , для которых прямая  $AB$  является полярной точки  $D = (1 : 0 : 0)$ ? Найдите уравнения таких коник.

**Задача 3.** Укажите аффинный тип вещественной аффинной квадрики  $Q$ , заданной в  $\mathbb{A}^3$  уравнением  $x^2 + 3y^2 - 4z^2 - 4xy - 4yz + 2z + 1 = 0$ . Укажите проективный тип проективного замыкания  $\overline{Q}$  квадрики  $Q$  при вложении  $\mathbb{A}^3$  в  $\mathbb{P}^3$  по формуле  $(x, y, z) \mapsto (1 : x : y : z)$ .

**Задача 4.** Пусть  $\mathbb{P}^2$  – проективная плоскость над полем  $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ,  $(x_0 : x_1 : x_2)$  – проективные координаты в  $\mathbb{P}^2$ ,  $l = \{x_0 = 0\}$  – проективная прямая в  $\mathbb{P}^2$ , и  $A = (0 : 0 : 1)$  – точка на  $l$ . (Такая пара  $(A, l)$ , где  $A \in l$ , называется флагом в  $\mathbb{P}^2$ .) В группе  $G = PGL(3, \mathbb{F}_5)$  проективных преобразований плоскости рассмотрим подгруппу  $H$ , являющуюся стабилизатором флага  $(A, l)$ , то есть подгруппу преобразований, сохраняющих флаг  $(A, l)$ :  $H := \{g \in G \mid g(A) = A, g(l) = l\}$ . Найдите порядок (число элементов) подгруппы  $H$ .

**Задача 5.** Пусть коника  $Y$  на вещественной проективной плоскости проходит через точки  $A = (1 : 0 : 1)$ ,  $B = (2 : 1 : -1)$ ,  $C = (-1 : 0 : 1)$  и касается прямой  $x_0 = 0$  в точке  $D = (0 : 1 : 0)$ . Найдите двойное отношение точек  $A, B, C, D$  на конике  $Y$ .

**Контрольная работа по геометрии,  
2 модуль 2015-16, 1 курс бакалавриата, 18.12.2015  
Вариант 3**

**Задача 1.** В вещественном проективном пространстве  $\mathbb{P}^3$  найдите координаты точек пересечения квадрики  $Q$ , заданной уравнением  $x_0^2 - x_2^2 + x_1x_3 = 0$ , с проективной прямой, проходящей через точки  $A = (0 : 0 : 1 : -1)$  и  $B = (1 : 0 : 0 : 1)$ .

**Задача 2.** Сколько имеется невырожденных коник на вещественной проективной плоскости, проходящих через точки  $A = (0 : 1 : 2)$ ,  $B = (0 : 1 : -1)$  и точку  $C = (-1 : 1 : 1)$ , для которых прямая  $AB$  является полярной точки  $D = (1 : 0 : 0)$ ? Найдите уравнения таких коник.

**Задача 3.** Укажите аффинный тип вещественной аффинной квадрики  $Q$ , заданной в  $\mathbb{A}^3$  уравнением  $2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 2x + 2z + 2 = 0$ . Укажите проективный тип проективного замыкания  $\overline{Q}$  квадрики  $Q$  при вложении  $\mathbb{A}^3$  в  $\mathbb{P}^3$  по формуле  $(x, y, z) \mapsto (1 : x : y : z)$ .

**Задача 4.** Пусть  $\mathbb{P}^2$  – проективная плоскость над полем  $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ,  $(x_0 : x_1 : x_2)$  – проективные координаты в  $\mathbb{P}^2$ ,  $l = \{x_0 = 0\}$  – проективная прямая в  $\mathbb{P}^2$ , и  $A = (0 : 0 : 1)$  – точка на  $l$ . (Такая пара  $(A, l)$ , где  $A \in l$ , называется флагом в  $\mathbb{P}^2$ .) В группе  $G = PGL(3, \mathbb{F}_5)$  проективных преобразований плоскости рассмотрим подгруппу  $H$ , являющуюся стабилизатором флага  $(A, l)$ , то есть подгруппу преобразований, сохраняющих флаг  $(A, l)$ :  $H := \{g \in G \mid g(A) = A, g(l) = l\}$ . Найдите порядок (число элементов) подгруппы  $H$ .

**Задача 5.** Пусть коника  $Y$  на вещественной проективной плоскости проходит через точки  $A = (1 : 0 : -2)$ ,  $B = (1 : 1 : -1)$ ,  $C = (1 : 0 : 1)$  и касается прямой  $x_0 = 0$  в точке  $D = (0 : 1 : 0)$ . Найдите двойное отношение точек  $A, B, C, D$  на конике  $Y$ .

**Контрольная работа по геометрии,  
2 модуль 2015-16, 1 курс бакалавриата, 18.12.2015  
Вариант 4**

**Задача 1.** В вещественном проективном пространстве  $\mathbb{P}^3$  найдите координаты точек пересечения квадрики  $Q$ , заданной уравнением  $2x_0x_1 - x_2x_3 = 0$ , с проективной прямой, проходящей через точки  $A = (1 : 1 : 0 : 0)$  и  $B = (0 : 0 : 1 : -1)$ .

**Задача 2.** Сколько имеется невырожденных коник на вещественной проективной плоскости, проходящих через точки  $A = (0 : 2 : 1)$ ,  $B = (0 : 1 : 2)$  и точку  $C = (2 : 1 : 1)$ , для которых прямая  $AB$  является полярной точки  $D = (1 : 0 : 0)$ ? Найдите уравнения таких коник.

**Задача 3.** Укажите аффинный тип вещественной аффинной квадрики  $Q$ , заданной в  $\mathbb{A}^3$  уравнением  $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 4yz + 4y + 2z + 1 = 0$ . Укажите проективный тип проективного замыкания  $\overline{Q}$  квадрики  $Q$  при вложении  $\mathbb{A}^3$  в  $\mathbb{P}^3$  по формуле  $(x, y, z) \mapsto (1 : x : y : z)$ .

**Задача 4.** Пусть  $\mathbb{P}^2$  – проективная плоскость над полем  $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ,  $(x_0 : x_1 : x_2)$  – проективные координаты в  $\mathbb{P}^2$ ,  $l = \{x_0 = 0\}$  – проективная прямая в  $\mathbb{P}^2$ , и  $A = (0 : 0 : 1)$  – точка на  $l$ . (Такая пара  $(A, l)$ , где  $A \in l$ , называется флагом в  $\mathbb{P}^2$ .) В группе  $G = PGL(3, \mathbb{F}_5)$  проективных преобразований плоскости рассмотрим подгруппу  $H$ , являющуюся стабилизатором флага  $(A, l)$ , то есть подгруппу преобразований, сохраняющих флаг  $(A, l)$ :  $H := \{g \in G \mid g(A) = A, g(l) = l\}$ . Найдите порядок (число элементов) подгруппы  $H$ .

**Задача 5.** Пусть коника  $Y$  на вещественной проективной плоскости проходит через точки  $A = (-1 : 0 : 1)$ ,  $B = (1 : 0 : 1)$ ,  $C = (-1 : 2 : 0)$  и касается прямой  $x_0 = 0$  в точке  $D = (0 : 1 : 0)$ . Найдите двойное отношение точек  $A, B, C, D$  на конике  $Y$ .