

Задача 1. Докажите, что всякая инволюция на проективной прямой $\mathbb{P}^1$ над произвольным полем характеристики $\neq 2$ (т. е. проективное преобразование f прямой $\mathbb{P}^1$ такое, что $f^2 = \text{id}$ и $f \neq \text{id}$) не может иметь единственную неподвижную точку. Приведите пример инволюции (над полем $\mathbb{R}$) без неподвижных точек.

Задача 2. Пусть C – непустая невырожденная коника. Двойным отношением 4 различных точек $A, B, C, D \in C$ называется двойное отношение 4 прямых (OA, OB, OC, OD) , где O – произвольная точка коники C , отличная от точек A, B, C, D . Докажите, что это определение корректно, т.е. не зависит от выбора точки O .

Задача 3. Пусть a, b, c – касательные прямые к невырожденной конике C в трех различных точках A, B, C соответственно. Пусть $C' = a \cap b$, $A' = b \cap c$, $B' = a \cap c$. Докажите, что прямые AA' , BB' и CC' пересекаются в одной точке.

Задача 4. Пусть C – непустая невырожденная коника над произвольным полем характеристики $\neq 2$ и $g_S : C \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1$ – стереографическая проекция с центром в фиксированной точке $S \in C$, где $\mathbb{P}^1$ – произвольная проективная прямая в $\mathbb{P}^2$, не проходящая через точку S . *Проективным преобразованием коники C* называется всякое биективное отображение $f : C \xrightarrow{\sim} C$ такое, что $g_S \circ f \circ g_S^{-1} : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ есть проективное преобразование прямой $\mathbb{P}^1$. Докажите, что это определение не зависит от выбора точки S на C и прямой $\mathbb{P}^1$ в $\mathbb{P}^2$, не проходящей через S .

Задача 5. В условиях предыдущей задачи докажите, что всякое проективное преобразование $f : C \xrightarrow{\sim} C$ коники C продолжается до проективного преобразования плоскости $\mathbb{P}^2$, т. е. существует такое проективное преобразование $\tilde{f} : \mathbb{P}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^2$, ограничение которого на C совпадает с f .

Задача 6. Пусть C – непустая невырожденная коника. Докажите, что любая инволюция f на C высекается пучком прямых, т.е. существует такая точка $O \notin C$, что для любой точки $X \in C$ имеем $\{X, f(X)\} = OX \cap C$.

Задача 7. Пусть C – невырожденная аффинная коника, имеющая центр симметрии O . Всякая прямая, проходящая через точку O , называется *диаметром коники C* . Диаметр l_2 называется *сопряженным* диаметру l_1 , если он параллелен касательным, проведенным в точках пересечения C с l_1 .

(а) Докажите, что если диаметр l_1 сопряжен диаметру l_2 , то и диаметр l_2 сопряжен диаметру l_1 .

(б) Докажите, что диагонали параллелограмма, описанного около коники C , являются ее сопряженными диаметрами.

Задача 8. В условиях задачи 7 докажите, что:

(в) если l_1 и l_2 – сопряженные диаметры коники C , то любая прямая, параллельная диаметру l_1 и пересекающая конику C в точках A и B , пересекает диаметр l_1 в середине отрезка $[AB]$;

(б) если C – гипербола, то любые два ее сопряженных диаметра гармонически делят ее пару асимптот.

Задача 9. Пусть C – эллипс или гипербола в евклидовой плоскости.

(а) Докажите, что имеется единственная пара сопряженных диаметров коники C , перпендикулярных друг другу. (Они называются *осями коники C* .)

(б) Пусть C – эллипс в евклидовой плоскости, OA и OB – два его сопряженных полудиаметра. Покажите, что можно следующим образом найти оси эллипса C . Проведем через точку A прямую, перпендикулярную OB , и отложим на ней по обе стороны от точки A отрезки длины $|OB|$. Получим две точки P и Q , и биссектрисы углов, образованных прямыми OP и OQ , являются искомыми прямыми.

Задача 10. В трехмерном комплексном проективном пространстве дана квадрика Q с уравнением $-x_0x_1 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ и точка $A = (1 : 1 : 0 : 1)$ на ней. Существуют ли прямые на Q , проходящие через точку A ? Если да, то найдите уравнения этих прямых.

Задача 11. На вещественной проективной плоскости даны 4 различные точки A, B, C, D и прямая l через точку D , не проходящая через точки A, B и C .

(а) Докажите, что существует единственная (притом невырожденная) коника C , проходящая через точки A, B, C и касающаяся прямой l в точке D .

(б) С помощью линейки постройте касательную к конике C в точке A .

Задача 12. На комплексной проективной плоскости рассмотрим три прямые, пересекающиеся в различных точках A, B, C . Пусть Q – невырожденная коника, касающаяся прямой AB в точке C_1 , прямой BC в точке A_1 и прямой AC в точке B_1 . Докажите, что точки пересечения прямых A_1B_1 и AB , B_1C_1 и BC , A_1C_1 и AC лежат на одной прямой.