

Семинар 1

Геометрия на плоскости комплексных чисел (комплексная плоскость в дальнейшем)

1. Какие линии на плоскости заданы уравнениями

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{1}{a} \quad (a > 0), \quad \operatorname{Re} \frac{z-1}{z+1} = 0, \quad \left| \frac{z-i}{z+i} \right| = 2.$$

2. Доказать, что уравнение $\overline{B}z + B\overline{z} + C = 0$, где $B \in \mathbb{C}$, $B \neq 0$, $C \in \mathbb{R}$, задает прямую на плоскости. Чему равен наклон этой прямой? Записать уравнением такого вида прямую $2x - y + 1 = 0$.

3. Пусть $A, C \in \mathbb{R}$, $A > 0$, $B \in \mathbb{C}$ и $AC < |B|^2$. Доказать, что уравнение $A|z|^2 + \overline{B}z + B\overline{z} + C = 0$ является уравнением окружности. Найти центр этой окружности и её радиус. Записать уравнением такого вида окружность $x^2 + y^2 + y = 0$.

4. Четыре попарно различные точки z_1, z_2, z_3, z_4 тогда и только тогда лежат на одной окружности (или прямой), когда двойное отношение $[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_3 - z_4} \in \mathbb{R}$.