Семинар 2

Стереографическая проекция

Представим комплексную плоскость $\mathbb{C}$ в виде плоскости $Z = 0$ в трехмерном пространстве и рассмотрим сферу S^2 единичного диаметра с центром в точке $(0, 0, 1/2)$. Точку $(0, 0, 1)$ на сфере назовем N и обозначим через $St(z)$ точку пересечения со сферой прямой, соединяющей N с точкой $z = X + iY$ комплексной плоскости.

Взаимно-однозначное (непрерывное в обе стороны) соответствие между точками $\mathbb{C}$ и проколотой сферой называется стереографической проекцией. Эту проекцию легко продолжить до взаимно-однозначного (непрерывного) отображения сферы S^2 на $\mathbb{C}P^1$ (=комплексная проективная прямая), назначив образом точки N бесконечно удаленнудю точку ∞ на карте $\mathbb{C}$.

Координатное описание стереографической проекции

1. Пусть $z \in \mathbb{C}$. Доказать, что пространственные кооординаты точки $St(z) = (X, Y, Z)$ на сфере вычисляются по формулам
$X = \dfrac{\mathrm{Re}z}{1 + |z|^2}$, $Y = \dfrac{\mathrm{Im}z}{1 + |z|^2}$, $Z = \dfrac{|z|^2}{1 + |z|^2}$.

2. Следствие: $\mathrm{Re}z = \dfrac{XZ}{X^2 + Y^2}$, $\mathrm{Im}z = \dfrac{YZ}{X^2 + Y^2}$.

3. Пусть $St(z) = (X, Y, Z)$. Найти координаты точек $St(-z)$, $St(\overline{z})$, $St(1/z)$.

4. Нарисовать на сфере области: $\{St(z), |z| < 1\}$, $\{St(z), \mathrm{Re}z > 0\}$.

5. Доказать, что окружности на сфере отвечает на комплексной плоскости или окружность, или прямая, причем прямая получается в том и только в том случае, когда окружность на сфере проходит через точку N. (Указание: воспользоваться формулами задачи 3 (семинар 1) и задачи 1, или, если Вы знаете, что такое инверсия, доказать, что St – это инверсия в сфере радиуса 1 с центром в точке N).

6. Сферу повернули, как твердое тело, вокруг оси $0Z$ на угол φ против часовой стрелки. Посредством проекции St это вызвало преобразование точек $\mathbb{C}P^1$. Куда при этом перешла точка $z \in \mathbb{C}$? Является ли индуцированное преобразование $\mathbb{C}P^1$ проективным преобразованием? А что случится с $\mathbb{C}P^1$, если сферу отразить в экваториальной плоскости?