Листок 2. Решение задачи Коши и уравнения первого порядка

УРЧП, 3-4 курс, **2.02.2015**

Дедлайн — 2 марта 2016 года.

2◇1 Найдите поверхность, удовлетворяющую уравнению $\operatorname{tg} x \frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$ и проходящую через линию $y = x$, $z = x^3$.

2◇2 Найдите поверхность, проходящую через прямую $y = x$, $z = 1$ и ортогональную к поверхностям

$$x^2 + y^2 + z^2 = Cx.$$

2◇3 Решите задачу Коши

$$u_{xx} - u_{yy} - 2u_x - 2u_y = 8, \quad u|_{x=0} = -2y, \quad u_x|_{x=0} = 2(y-1).$$

2◇4 Почему нельзя найти такую функцию $u(x, y)$, которая удовлетворяла бы уравнению

$$u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0$$

и условиям $u|_{y=x+1} = x + x^2$, $u_x|_{y=x+1} = x^2 - x$?

2◇5 Какой должна быть функция $g(x)$, чтобы существовало решение задачи Коши

$$u_{xx} + 5u_{xy} + 6u_{yy} = 0, \quad u|_{y=3x+2} = 4x^2 + 1, \quad u_x|_{y=3x+2} = g(x)?$$

2◇6 **а)** Описать колебания бесконечной струны, происходящие при $t \in (-\infty, +\infty)$ и такие, что некоторый участок струны $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ покоится в течение всего времени этих колебаний.

б) Тот же вопрос, но участок струны $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ покоится при $t \geqslant 0$.

2◇7 Нарисуйте графики функций $u(x,t)|_{t=t_k}$ при $t_k = \frac{kl}{4a}$, $k = 0, \ldots, 5$, являющейся решением задачи Коши для уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \qquad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = v_0(x),$$

где

а) (*Струна гитары.*) $v_0(x) \equiv 0$, $u_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, l] \cup [3l, +\infty) \\ \dfrac{a}{l}x - a, & x \in [l, 2l] \\ -\dfrac{a}{l}x + 3a, & x \in [2l, 3l] \end{cases}$;

б) (*Струна рояля.*) $u_0(x) \equiv 0$, $v_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, l) \cup (2l, +\infty) \\ a, & x \in [l, 2l] \end{cases}$.