

Листок 9. Сравнительная геометрия сферы и плоскости Лобачевского.

1. Пролетает ли самолет Москва–Нью-Йорк над Францией?

Рассмотрим единичную сферу с центром в начале координат O трехмерного пространства. Назовем *большой окружностью* (сферической прямой) сечение этой сферы произвольной плоскостью, проходящей через точку O .

Каждому ненулевому вектору пространства можно сопоставить два объекта сферической геометрии: точку на сфере и большую окружность. А именно, вектору можно сопоставить точку пересечения сферы с лучом, исходящим из точки O в направлении данного вектора (рис. 1а), и можно сопоставить сечение сферы плоскостью, проходящей через точку O и перпендикулярной этому вектору (рис. 1б). Точку (сферическую прямую), соответствующую данному вектору, будем обозначать той же буквой, что и сам вектор, только без значка вектора. Будем обозначать через $[\vec{A}, \vec{B}]$ векторное произведение векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$.

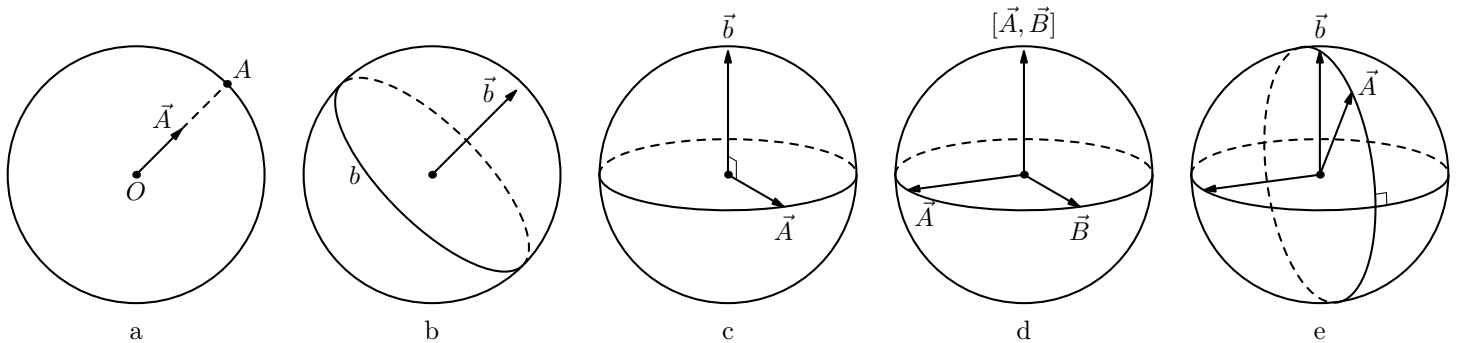


Рис. 1: Точки, прямые на сфере и векторы

2. а) Если векторы $\vec{A}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то точка A лежит на сферической прямой b (Рис 1с).
- б) Вектор $[\vec{A}, \vec{B}]$ соответствует сферической прямой, проходящей через A и B (Рис. 1d).
- с) Вектор $[\vec{A}, \vec{b}]$ (если он ненулевой) соответствует перпендикуляру, опущенному из точки A на сферическую прямую b (Рис. 1е).
- д) Если $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, то три сферические прямые a , b , c пересекаются в двух точках.
- е) (В.И. Арнольд) Пусть A , B и C — вершины сферического треугольника. Что означает геометрически тождество Якоби $[\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]] + [\vec{B}, [\vec{C}, \vec{A}]] + [\vec{C}, [\vec{A}, \vec{B}]] = 0$?

В следующей задаче ABC — сферический треугольник, AB , BC и CA — длины его сторон, то есть длины дуг соответствующих больших окружностей, $\angle ABC$ — угол между сферическими прямыми AB и BC .

3. а) Медианы треугольника на сфере пересекаются в одной точке.
 б) *Сферическая теорема косинусов*: $\sin AB \sin BC \cos \angle ABC = \cos AC - \cos AB \cos BC$.
 с) Сформулируйте и докажите сферическую теорему синусов.

4. Выразите площадь треугольника на сфере через его углы. Начните со случаев:
 а) все три угла равны $\pi/2$; б) два угла равны $\pi/2$; с) углы произвольны.

5. Выразите длину и площадь окружности на сфере через ее радиус (*радиус* понимается как расстояние *на сфере* от точки окружности до ее центра *на сфере*).

В последующих задачах все построения производятся на плоскости Лобачевского.

В *моделях Клейна и Пуанкаре* точки плоскости Лобачевского изображаются точками круга на плоскости Евклида (не включая граничную окружность). В модели Клейна прямые изображаются хордами этого круга (не включая концы), а в модели Пуанкаре — диаметрами круга или дугами с концами на граничной окружности, перпендикулярными ей (не включая концы).

Лучи AB и CD *параллельны*, если они не пересекаются, но при этом любой луч AH , лежащий строго внутри угла CAB , пересекает луч CD . Прямые *параллельны*, если они содержат два параллельных луча. *Аксиома Лобачевского*: через точку A вне прямой CD можно провести две различные прямые, параллельные CD . *Угол параллельности* для A и CD — это половина угла между двумя проведенными прямыми.

6. а) Две параллельные прямые изображаются в модели Клейна или Пуанкаре хордами или дугами с общим концом.
 б) Проверьте аксиому Лобачевского в моделях Клейна и Пуанкаре.
 с) Выразите угол параллельности для точки A и прямой CD через длину перпендикуляра, опущенного из A на CD .

7. Правильный n -угольник вписан в окружность радиуса r . Найдите:

- а) стороны; б) углы; с) площадь n -угольника; д) длину и площадь окружности.

8. Какой фигурой изображается:

- а) окружность; б) орицикл; с) эквидистанта; — в модели Пуанкаре;
 д) окружность; е) орицикл; ф) эквидистанта; г) конус; h) эллипс; — в модели Клейна?
Примечание. В пункте г) рассматривается 3-мерное пространство Лобачевского. В пункте h) *эллипс* — ГМТ, сумма расстояний от которых до двух данных точек постоянна.

9. Через любые три точки проходит окружность, орицикл, эквидистанта, или прямая.

10. Движение плоскости Лобачевского продолжили до преобразования f круга в модели Клейна или Пуанкаре. Сколько неподвижных точек может иметь f на границе круга?

11. *Функция Буземана*. Пусть луч изображается в модели Клейна радиусом OA . Тогда для каждой точки X существует предел $\lim_{Y \rightarrow A, Y \in OA} (XY - OY)$.

12.* (**Фольклорная задача**). Найти геометрическое место точек плоскости Лобачевского, из которых данный отрезок виден под прямым углом.