Семинар 5

Через M обозначим группу дробно-линейных преобразований $\mathbb{C}P^1$, состоящую из преобразований вида $z \to \dfrac{az+b}{cz+d}$ или $z \to \dfrac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}$, через M^+ – её подгруппу индекса 2, состоящую из преобразований, сохраняющих ориентацию (иными словами $M^+ = PGL(2,\mathbb{C})$).

1. Докажите, что $\gamma \in M^+$ сохраняет двойное отношение четырех точек $[z_0, z_1, z_2, z_3] = \dfrac{z_2 - z_0}{z_1 - z_3} \cdot \dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$.

2. Пусть отображение γ: $\mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ – взаимно-однозначно и сохраняет двойное отношение. Докажите, что $\gamma \in M^+$.

3. Способна ли группа M поменять местами любые две окружности в $\mathbb{C}P^1$?

4. Может ли группа M перевести пару непересекающихся окружностей в пару концентрических?

5. Рассмотрим в $\mathbb{C}P^1$ две четверки попарно касающихся окружностей. Может ли группа M перевести одну четверку в другую?

Резервная задача

6 *. Доказать, что взаимно-однозначное преобразование φ: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, сохраняющее ориентацию и переводящее окружности в окружности, а прямые в прямые, имеет вид $\varphi(z) = \alpha z + \beta$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\beta \in \mathbb{C}$.