Модуль 3.

Геометрия Лобачевского (лектор ОВ Шварцман)

Литература: В.В. Прасолов . Геометрия Лобачевского,МЦНМО,2002

Лекция 1

Метрическое пространство Гильберта в овалах. Аксиоматика Колмогорова геометрии Лобачевского. Построение модели Кэли-Клейна в круге.

Лекция 2

 Группа изометрий модели Кэли – Клейна совпадает с группой проективных преобразований круга .Роль отражений. Теорема о том, что любое собственное движение плоскости Лобачевского есть произведение двух отражений. Классификация собственных движений.

Лекция3.

Гиперболические треугольники .Первая и вторая теорема косинусов. Теорема синусов. Простейшие построения на плоскости Лобачевского (перпендикуляр из точки на прямую ,общий перпендикуляр к расходящимся прямым).Сумма углов гиперболического треугольника меньше развернутого угла .Идеальные гиперболические треугольники и равносторонние треугольники Кокстера. Необычные замощения гиперболической плоскости.

Лекция 4.

Попытка Лежандра доказать Пятый постулат .Угловой дефект треугольника .Площадь гиперболического треугольника. Доказательство равенства любых двух идеальных треугольников.

Гиперболическая техника в задачах евклидовой геометрии: теорема о бабочке.

Лекция 5

.Группа автоморфизмов одномерного комплексного проективного пространства ,Действие дробно-линейными преобразованиями на комплексной плоскости. Инверсии. Присоединение инверсий. Группа Мебиуса. Инверсии как отражения в окружностях. Ортогональные окружности и коммутирующие инверсии.

Лекция 6

Группа Мебиуса переводит окружности в окружности и сохраняет углы между кривыми. Конформные модели плоскости Лобачевского. Модель Пуанкаре в единичном диске и на верхней полуплоскости. Изоморфизм этих моделей .Измерение расстояний. Функция Альфорса на верхней полуплоскости

Лекция 7

Группа движений верхней полуплоскости порождается отражениями(инверсиями)Следствие: Группа собственных движений верхней полуплоскости совпадает с группой PSL(2,R). Орициклы Эквидистанты. Построения циркулем и линейкой на верхней полуплоскости(общий перпендикуляр к двум прямым, перпендикуляр из точки на прямую и т.п.)

Лекция 8

Эллиптические ,гиперболические и параболические матрицы второго порядка с определителем 1.Характеризация в терминах следа матрицы .Геометрия их действия на верхней полуплоскости. Алгебра гамильтоновых кватернионов и модель Пуанкаре пространства Лобачевского.Теорема Топоногова и теорема Громова(без доказательства)

Лекция 9.Правильные мозаики на сфере, евклидовой плоскости и плоскости Лобачевского.

Треугольные группы Кокстера. Граф Кокстера. Треугольные группы Кокстера правильных мозаик. Проблема существования правильных мозаик ил Кошмар Плиточника.

Лекция 10.Группа Кокстера как группа симметрий правильной мозаики .Группы автоморфизмов пяти платоновых тел.

Лекция 11. Замощение гиперболической плоскости идеальными треугольниками. Дроби Фарея.

Группа PSL(2,Z) как подгруппа индекса 2 группы Кокстера типа (2,3,infinity).Образующие и фундаментальная область. Связь с цепными дробями.

Лекция 12.Доказательство теоремы Пуанкаре для треугольных групп Кокстера .Решение задачи о существовании правильных гиперболических мозаик.

Лекция 13.Дискретная группа движений. Кристаллографические группы. Фундаментальная область. Существование фундаментальных областей Вороного-Дирихле. Примеры.

Лекция 14.Факторповерхности кристаллографических дискретных групп .Язык геометрических склеек. Примеры склеек евклидова тора и гиперболического кренделя. Свяэь геометрических склеек и дискретных групп движений. Большая теорема Пуанкаре (без доказательства)

Лекция 15.Геометрия и алгебра квадратичного пространства Лоренца сигнатуры (2,1).Группа Лоренца .Конус Лоренца.

Лекция 16 .Линейная( реальная и правильная модель )геометрии Лобачевского на базе пространства Лоренца Простейшие приемы работы в линейной модели .Прощание с курсом.

Минимальные требования к участникам экзамена по геометрии.

Для того, чтобы сдать экзамен по геометрии 29 марта 2016 года на 4-5 (по 10 бальной шкале Цельсия)

необходимо

а) срочно отучиться списывать

б) уметь :

восстанавливать гиперболический треугольник по трем его элементам ,т.е. владеть

двумя теоремами косинусов и теоремой синусов в любой из моделей,

находить расстояние между двумя точками, от точки до прямой, между расходящимися прямыми.

Владеть техникой отражений ( знать и понимать, что такое инверсия)

В модели Пуанкаре знать классификацию движений и понимать ,ч то эти движения умеют делать как на верхней полуплоскости, так и на абсолюте.

Иметь представление о площадях в гиперболической геометрии( уметь находить площадь треугольника)

Знать определение дискретной группы движений и понимать, что такое фундаментальная область и как ее можно в простых случаях построить.

Рекомендуемая литература.

Прасолов В.В. Геометрия Лобачевского

( с маленькой оговоркой: формулы ,которые Вы захотите использовать, но которые не встречались в этом курсе, нужно будет в экзаменационной работе доказывать)