Динамические системы 2015/2016
Лагранжева механика 1

В.А. Побережный

1 Напоминание из физики

1.1 Законы Ньютона

Законы эти, вообще говоря, формулируются для частиц, под частицей подразумевается точечный объект, характеризующийся массой m, радиус-вектором положения $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ и скоростью $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, или импульсом $\overrightarrow{\mathbf{p}}$, определяемыми дифференцированием $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ по времени: $\frac{d}{dt}m\overrightarrow{\mathbf{r}} = m\overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{p}}$.

1. Если $\overrightarrow{\mathbf{F}} = 0$, то $\overrightarrow{\mathbf{v}} = const$
2. $\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{\mathbf{p}} = \dfrac{d}{dt}(m\overrightarrow{\mathbf{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{F}}$
3. $\overrightarrow{\mathbf{F}}_{12} = -\overrightarrow{\mathbf{F}}_{21}$
4. (подразумевается) Силы, действующие на точку, складываются как вектора.

Важно понимать, что это **не объяснения** (всё летает так как летает потому что есть законы Ньютона) это **наблюдения, или факты, или аксиомы модели** (то есть, у нас всё летает так как оно летает, а эти законы хорошо согласуются с тем что мы можем увидеть и померить). Таким образом, физические законы отвечают не на вопрос **почему** камень полетит так, как он полетит если его запустить, они отвечают на вопрос **как** он полетит. По сути, классическая механика предлагает изучать "модельный"мир, построенный на этих аксиомах. При этом, все предсказываемые результаты, как правило, можно проверять на соответствие реальному миру, нас окружающему, и наблюдать большее или меньшее соответствие.

1.2 Величины, размерности и следствия

Даже не зная конкретного вида действующих сил $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ из законов Ньютона можно получить некоторые содержательные следствия.

Возьмём замкнутую систему двух частиц. Внешних сил нет, поэтому единственными действующими силами будут $\overrightarrow{\mathbf{F}}_{12}$ и $\overrightarrow{\mathbf{F}}_{21}$. Из третьего и второго законов Ньютона получаем (интеграл берётся по времени вдоль траектории $\mathbf{r}(t)$ движения системы):

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \left(\overrightarrow{\mathbf{F}}_{12} + \overrightarrow{\mathbf{F}}_{21}\right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{\mathbf{p}}_1 + \frac{d}{dt}\overrightarrow{\mathbf{p}}_2\right) dt = \left(\overrightarrow{\mathbf{p}}_1 + \overrightarrow{\mathbf{p}}_2\right)\Big|_{t_0}^{t_1} \quad (1)$$

Таким образом, мы видим, что для изолированной системы двух частиц справедлив закон сохранения импульса. Заодно, заметим на будущее, что **интеграл от силы по времени равен изменению импульса** (это конечно же эквивалентная формулировка второго закона), и что размерности силы и импульса отличаются на единицу времени. Очевидно, всё без изменения переносится на случай большего числа частиц.

Возьмём теперь движение одной частицы в поле силы $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ и посмотрим на интеграл от силы по пространству, снова двигаясь вдоль фиксированной траектории $\mathbf{r}(t)$.

$$\int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\overrightarrow{\mathbf{p}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\overrightarrow{\mathbf{p}} \cdot \frac{1}{m}\overrightarrow{\mathbf{p}} \cdot dt = \int_{t_0}^{t_1} d\left(\frac{\overrightarrow{\mathbf{p}}^2}{2m}\right) = T(t_1) - T(t_0) \tag{2}$$

То есть, **интеграл от силы по пути равен изменению кинетической энергии** частицы, где мы определили кинетическую энергию соотношением

$$T = \frac{\overrightarrow{\mathbf{p}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{p}}}{2m} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{p}}^2}{2m} = \frac{m\overrightarrow{\mathbf{v}}^2}{2} \tag{3}$$

Вспоминая (или определяя), что работа, производимая силой $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ в единицу времени равна $\overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}$ мы видим, что **полная работа сил, действующих на частицу на промежутке времени** (t_0, t_1) **равна изменению кинетической энергии частицы**. Теперь, если поле $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ потенциально, мы можем получить закон сохранения энергии.

1.3 Потенциальные поля

Поле $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ называется потенциальным если существует функция U (потенциал) такая, что в каждой точке $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ получается из потенциала дифференцированием:

$$\overrightarrow{\mathbf{F}} = -\nabla U = -\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{4}$$

то есть силу можно представить как градиент некоторой функции U. В таком случае

$$\int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}} = -\int_{t_0}^{t_1} \nabla U \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}} = -\int_{t_0}^{t_1} dU = U(t_0) - U(t_1) \tag{5}$$

Что, вместе с уравнением (2) даёт

$$T(t_0) + U(t_0) = T(t_1) + U(t_1) \tag{6}$$

То есть, при движении в потенциальном поле полная энергия $E = T + U$ сохраняется. Также, из уравнения (5) следует, что **работа потенциальной силы по замкнутому контуру равна нулю**. Очевидно это утверждение обратимо, и может служить определением потенциальности.
Задача: *Будут ли потенциальными поля* $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x, y) = (x, y)$, $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x, y) = (-y, x)$, $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x, y) = (y, x)$*?*

Как узнать, что данная сила $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ потенциальна? В силу вышесказанного достаточно проверить, что её работа по всякому замкнутому контуру равна нулю или, что то же самое, что форма $\overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}}$ точна, в таком случае потенциал U определяется интегралом этой формы по контуру. Как известно, для точности 1-формы в $\mathbb{R}^n$ необходима и достаточна её замкнутость. То есть, условием потенциальности силы $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ заданной в декартовых координатах является равенство смешанных производных $\partial_y F_1 = -\partial_x F_2$, итд. Важный частный случай - во многих задачах, начиная с самых простых часто удобнее пользоваться полярными координатами, а не декартовыми. Как будет выглядеть условие потенциальности в этом случае? Раскладывая вектор $d\overrightarrow{\mathbf{r}}$ по локальному базису $(\overrightarrow{\mathbf{e}}_r, \overrightarrow{\mathbf{e}}_\varphi)$ получаем в полярных координатах $d\overrightarrow{\mathbf{r}} = dr \cdot \overrightarrow{\mathbf{e}}_r + r \cdot d\varphi \overrightarrow{\mathbf{e}}_\varphi$. (Напомним, что $d\varphi$ это изменение угловой величины, а $\overrightarrow{\mathbf{e}}_\varphi$ соответствующий единичный вектор в декартовом смысле, поэтому нужен нормировочный множитель r). Таким образом, $\overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}} = F_r dr + rF_\varphi d\varphi$ и значит, условием потенциальности будет $\partial_\varphi F_r = -\partial_r(rF_\varphi)$. Следствие – центральное (такое, что компонента $F_\varphi = 0$) поле $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ потенциально тогда и только тогда, когда F_r не зависит от φ, То есть когда оно центрально-симметрично.

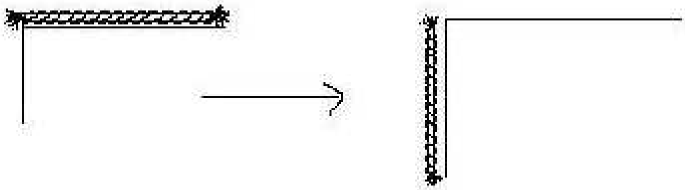
2 Практика

Рассмотрим нулевой детский пример для предварительного вычисления некоторых величин используемых в дальнейшем – свободное падение материальной точки под действием силы тяжести земли вблизи от поверхности. Итак, на точку массой m действует сила $F = mg$ направленная вертикально вниз (к центру земли). Кстати, $g \sim \pi^2 \cdot \text{м}/\text{с}^2$ ускорение свободного падения, в идеальном мире (гладкая однородная невращающаяся сферическая земля) равенство становится точным. Задача одномерная, вектора можно не писать, начальную скорость берём нулевую, начальная высота h. Интересует характер зависимости высоты x от времени t, время падения с высоты h и скорость с которой тело прилетает с высоты h. Стандартное школьное решение:

$$\frac{d}{dt}p = \frac{d}{dt}(mv) = m\frac{d}{dt}v = F = mg \text{ первый закон Ньютона}$$
$$\frac{d}{dt}v = g \Rightarrow v = v_0 + gt = gt \text{ движение равноускоренное}$$
$$x = h - \frac{gt^2}{2} \text{ зависимость высоты от времени квадратичная}$$
$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \text{ время падения с высоты } h$$
$$v = gt = \sqrt{2gh} \text{ скорость прилёта с высоты } h$$

2.1 Падающий канат(цепь) 0

Задача: *С гладкого стола перпендикулярно его краю без трения соскальзывает однородный нерастяжимый канат(цепь) длины L и массой m. Найти* *скорость каната в момент полного соскальзывания со стола.*



Решение: Сила (гравитация) потенциальная, следовательно, энергия сохраняется. В начальный момент времени кинетическая энергия равна нулю так как канат не движется. Потенциальная энергия равна mgh, где h высота каната от уровня отсчёта. Потенциальная энергия определяется неоднозначно, а с точность до константы, или, в данном случае, с точностью до сдвига h. Можно выбрать $h = 0$ или $h = L$, но из соображений симметрии особенно удобно взять $h = L/2$ ведь в этом случае потенциальная энергия в конечный момент времени равна нулю

$$E_0 = mgh = mgL/2 \qquad \simeq \text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} \tag{7}$$

В конечный момент времени весь канат целиком движется линейно с некоторой скоростью v, следовательно, его кинетическая энергия равна $mv^2/2$. Потенциальная энергия находится интегрированием. Кусочек каната длины δx находящийся на высоте x имеет потенциальную энергию ${}^xE = \delta m \cdot g \cdot x$, где δm масса кусочка длины δx. Для однородного каната длины L и массы m очевидно $\delta m = (m/l) \cdot \delta x$. Следовательно,

$$E_1 = \frac{mv^2}{2} + \int_{-L/2}^{L/2} {}^xE dx = \frac{mv^2}{2} + \int_{-L/2}^{L/2} \frac{mgx}{L} dx = \frac{mv^2}{2} \tag{8}$$

Из сохранения энергии $E_0 = E_1$ сразу находим $v^2 = gl$ и окончательно, $v = \sqrt{gL}$.

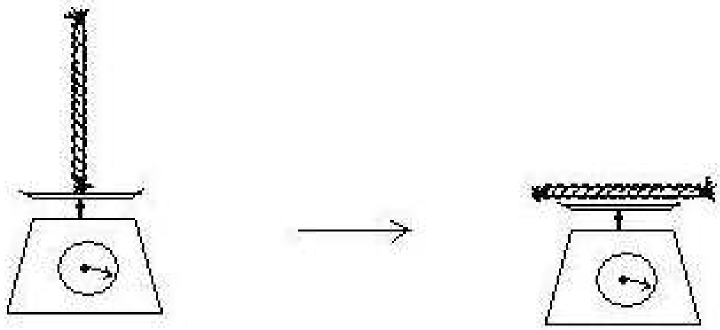
Замечание: Если сравнить со скоростью свободно падающей с высоты h материальной точки ($v = \sqrt{2gh}$), то можно заметить, что лежащая на столе часть замедляет падение.

2.2 Падающая цепь 1

Задача: *Подвешенная за верхний конец цепь нижним концом касается чаши весом (сенсора динамометра). Определить показания прибора в момент полного падения цепи*

Это очень наглядная задача, когда груз лежит у нас на ноге, и когда он на неё прилетает, ощущения сильно разные. Тут предлагается эту разницу исследовать.

Решение: Весы (динамометр) показывают вес (силу!), не массу, это важно. У неподвижно лежащей материальной точки массы m вес равен



$P = mg$. Будем параметризовать динамику не временем, а длиной упавшей части цепи, так удобнее и нагляднее. Итак, когда на весах лежит кусок длины x, сила действующая на весы складывается из двух компонент: веса куска длины x и "толчка" от прилетевшего последнего кусочка (звена) длины δx. Первая часть очевидно равна $P_1 = (m/L) \cdot x \cdot g$. Как найти вторую часть? Посмотрим, что происходит за маленькое время δt: летящий с некоторой скоростью кусочек цепи ударяется о чашу весов и останавливается. То есть, весы подействовали на него с силой, изменившей его импульс p до нуля. Но в таком случае, и сам кусочек подействовал на весы ровно с этой же силой. Значит, на весы подействовала сила, изменяющая импульс от p до нуля за время δt. (напоминаем, что сила это как раз то, что меняет импульсы) Для начала, найдём импульс p кусочка длины δx прилетающего в "момент"x:

$$p = \delta m \cdot v(x) = \frac{m}{L} \cdot \delta x \cdot v(x) = \frac{m}{L} \cdot v(x)\delta t \cdot v(x) = \frac{m}{L} \cdot v^2(x)\delta t \sim \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^{\cancel{2}} \cdot \cancel{\text{с}}}{\cancel{\text{м}} \cdot \text{с}^{\cancel{2}}} \tag{9}$$

Соответственно сила, определяемая как изменение этого импульса (до нуля) отнесённое к времени изменения (δt) равна $P_2 = (m/L) \cdot v^2(x)$. Осталось найти скорость $v(x)$. Это скорость кусочка, свободно упавшего с высоты x, то есть $v(x) = \sqrt{2gx}$. Таким образом:

$$P(x) = \frac{m}{L} x \cdot g + \frac{m}{L} \cdot 2gx = \frac{3mgx}{L} \tag{10}$$

$$P(L) = 3mg \tag{11}$$

То есть сила действующая на весы в три раза больше чем если бы цепь просто лежала.

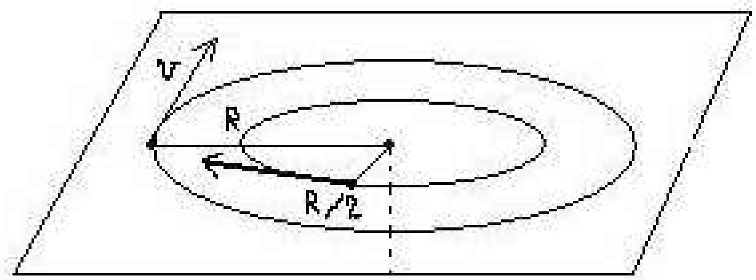
Посмотрим теперь динамику, как изменяются во времени показания весов. В получившемся ответе P растёт линейно по x при $x < L$ и становится постоянным при $x > L$. Теперь можно вспомнить, что сам x зависит от t квадратично: $x = gt^2/2$ (обычное свободное падение) и таким образом:

$$P(t) = \begin{cases} \frac{3mg^2t^2}{2L} & \text{при } gt^2/2 < L \\ mg & \text{при } gt^2/2 > L \end{cases} \tag{12}$$

Замечание: Очень важно регулярно соотносить получающуюся теорию с реальным миром, проверять её адекватность, следить за расхождениями, учитывать область применимости. Как эта картина будет выглядеть на самом деле в реальном эксперименте? Во-первых, в момент окончательного падения график не может мгновенно разрывно выйти на константу, очевидно будут наблюдаться затухающие (экспонента) колебания. Во-вторых, всё то же самое будет наблюдаться и для каждого последовательного звена цепи, каждое из них будет вносить затухающие возмущения всё большей амплитуды.

2.3 Что у кого сохраняется, и что куда переходит

Задача: *Материальная точка массы m движется в плоскости по окружности радиуса R с линейной скоростью v, будучи закреплена на нерастяжимой невесомой нити, пропущенной через отверстие в этой плоскости. Нить тянут за нижний конец на длину $R/2$. Найти совершённую работу.*



Тут тоже перед решением можно и даже полезно предварительно представить что вообще происходит. Если мы раскрутим например ключи на цепочке, или грузик на верёвочке, то во-первых, мы конечно будем рукой чувствовать, что он пытается улететь и утащить за собой цепочку. Это проявляется центростремительная сила действия цепочки на ключи, и центробежная ключей на цепочку. Во-вторых, если мы, раскрутив, попробуем тянуть через руку свободный конец цепочки, то нам придётся прикладывать заметные усилия. То есть, мы **производим** работу, не цепочка сама пытается втянуться, а мы её заставляем. То есть, наша работа **положительна**, мы закачали в систему дополнительную энергию к тому, что уже было. Если бы мы наоборот, имея в руке достаточный запас длины верёвки, отпустили наш грузик отлететь дальше его начального положения, то нам не пришлось бы прикладывать никаких усилий, достаточно было бы просто на некоторое время ослабить усилие, с которым мы удерживаем верёвку. То есть тут работу проводили бы уже не мы, а сама система, и делала бы это за счёт своей имеющейся энергии понижая её уровень. Как здесь можно наглядно представлять энергию? Энергия это способность производить работу, то есть, действовать на что-нибудь какой-нибудь силой, то есть передать этому кому-нибудь какой-нибудь импульс. Например, можно подставлять на пути движущейся штуки стеклянную пластинку. Чем более толстую пластинку способен разбить движущийся груз, тем больше энергия системы. (Особенно хорошо видно для маятника) Так как масса груза постоянна, то сила удара очевидно зависит только от линейной скорости груза. Если мы попробуем провести реальный эксперимент, то очень хорошо заметно, что при втягивании цепочки груз начинает вращаться быстрее. То есть, по крайней мере из эксперимента видно, что при таком преобразовании системы сохраняется не скорость, импульс или энергия, а видимо что-то другое. Заодно видно, что если мы воздействуем на систему **только** отпусканием/втягиванием удерживающей нити, то её энергия убывает с увеличением радиуса и растёт при его уменьшении. Осталось посмотреть как всё это описывается формально.

Решение: Как вообще описывается движение по окружности радиуса R с постоянной скоростью v_0, как устроены действующие силы, чему равно ускорение? Равномерное движение по окружности задаётся, как известно, стандартными тригонометрическими функциями: $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = (R\cos\omega t, R\sin\omega t)$. Таким образом получаем:

$$\begin{cases} x = R\cos\omega t \\ y = R\sin\omega t \end{cases} - \quad \begin{cases} \dot{x} = -R\omega\sin\omega t \\ \dot{y} = R\omega\cos\omega t \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{x} = -R\omega^2\cos\omega t \\ \ddot{y} = -R\omega^2\sin\omega t \end{cases}$$

$$|\overrightarrow{\mathbf{r}}| = R \qquad \begin{array}{l} |\dot{\overrightarrow{\mathbf{r}}}| = R\omega \\ \overrightarrow{\mathbf{r}} \cdot \dot{\overrightarrow{\mathbf{r}}} = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} |\ddot{\overrightarrow{\mathbf{r}}}| = R\omega^2 \\ \ddot{\overrightarrow{\mathbf{r}}} = -R\omega^2\overrightarrow{\mathbf{e}_r} = -\omega^2\overrightarrow{\mathbf{r}} \end{array}$$

То есть, равномерное движение точки с угловой скоростью ω по окружности радиуса R обеспечивается действующей на неё центральной силой равной по модулю $R\omega^2$. Если выразить модуль силы через линейную скорость $\dot{\overrightarrow{\mathbf{r}}}$ получим $R\omega^2 = |\dot{\overrightarrow{\mathbf{r}}}|^2/R = v_0^2/R$. Итого: для равномерного движения точки массой m по окружности радиуса R с линейной скоростью v_0 **необходима** центростремительная сила равная mv_0^2/R.

Итак, у нас имеется центростремительная сила $\overrightarrow{\mathbf{F}}_{\text{цс}}$. Кроме того, тянем верёвку мы также очевидно вдоль самой верёвки, и значит, все действующие на точку силы являются центральными, то есть $\overrightarrow{\mathbf{F}}$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{p}}$ параллельны. Но в таком случае будет сохранятся угловой момент точки.

$$\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}} \times \overrightarrow{\mathbf{p}}\right) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{\mathbf{r}} \times \overrightarrow{\mathbf{p}} + \overrightarrow{\mathbf{r}} \times \frac{d}{dt}\overrightarrow{\mathbf{p}} = \frac{1}{m}\overrightarrow{\mathbf{p}} \times \overrightarrow{\mathbf{p}} + \overrightarrow{\mathbf{r}} \times \overrightarrow{\mathbf{F}} = 0 + 0 = 0$$

(Видим, что угловой момент сохраняется для всех центральных полей) То есть,

$$\overrightarrow{\mathbf{\Omega}} = \overrightarrow{\mathbf{r}} \times \overrightarrow{\mathbf{p}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_0 \times \overrightarrow{\mathbf{p}}_0 = \overrightarrow{\mathbf{\Omega}}_0 = const$$
$$\Omega = |\overrightarrow{\mathbf{\Omega}}| = |\overrightarrow{\mathbf{r}} \times \overrightarrow{\mathbf{p}}| = |\overrightarrow{\mathbf{r}}| \cdot |\overrightarrow{\mathbf{p}}| = rmv = \Omega_0 = |\overrightarrow{\mathbf{\Omega}}_0| = Rmv_0$$

Теперь всё досчитывается элементарно. Из $F = mv^2/r$ и $mvr = \Omega_0$ следует $F = \Omega_0^2/(mr^3)$, соответственно работа равна:

$$\int_R^{R/2} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}} = -\int_R^{R/2} F dr = -\int_R^{R/2} \frac{\Omega_0^2}{mr^3} dr = \frac{\Omega_0^2}{2m}\frac{1}{r^2}\bigg|_R^{R/2} = \frac{3\Omega_0^2}{2mR^2} \qquad (13)$$

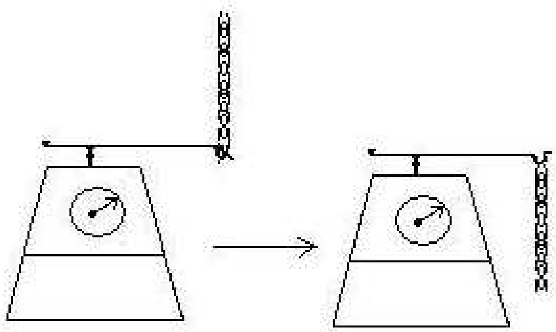
Или, выражая через начальные данные,

$$A = \frac{3\Omega_0^2}{2mR^2} = \frac{3mv_0^2}{2} = 3E_0$$

Таким образом энергия системы увеличилась в 4 раза, совершённая работа равна трём начальным энергиям.
Замечание: Для полного втягивания точки в дырку требуется бесконечная сила и работа. Почему так?

3 Задачи, которые надо уметь решать после этой лекции

Задача: *Будет ли потенциальным поле* $\overrightarrow{\mathbf{F}} = r^{-1}\overrightarrow{\mathbf{e}}_{\varphi}$*?*
Задача: *Выписать условие потенциальности поля* $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ *в сферических координатах.*
Задача:*Подвешенная за верхний конец цепь нижним концом зацеплена (без провисания) за крюк весов (сенсора динамометра). Определить показания прибора в момент полного падения цепи.*



Задача(x): *Пусть теперь к нижнему концу верёвки пропущенной через плоскость привешен груз той же массы* m*. Верхний груз движется по круговой орбите радиуса* R *с линейной скоростью* v*, нижний висит неподвижно. Найти соотношение между* v *и* R*.*
Задача: *В условиях задачи* **(x)** *нижний груз берут рукой и тянут вертикально вниз на* $R/2$*. Как надо изменить теперь массу нижнего груза чтобы после отпускания руки он остался висеть неподвижно?*
Задача: *В условиях задачи* **(x)** *нижний груз берут рукой и цепляют к нему ещё один груз такой же массы. На какую высоту теперь надо опустить новый нижний груз чтобы после отпускания руки он остался висеть неподвижно?*
Задача(*): *В условиях задачи* **(x)** *к нижнему концу верёвки прикрепляют ещё один груз массы* m*. Что произойдёт с системой? Как низко сможет опустится удвоенный груз??*
Задача: *В условиях предыдущей задачи удвоенный нижний груз поддерживают рукой снизу, не давая ему спускаться слишком быстро. До какой высоты он опустится?*